受講する皆さんへ

ようこそ，スタディサプリ スタンダードレベル数学B+C(ベクトル)の講座へ。この講座は**「数学B+C(ベクトル)を，用語の意味や公式のなりたちから学び，問題演習を通じて深めたい」**という人に適した講座となっています。

数学Ｂ＋Ｃ(ベクトル)では，日常や社会において数学を活用する際に基礎的な役割を果たす内容を学習します。この講座では，算数や中学校の数学や数学Ⅰ・Ａの学習で得た知識や経験を時に振り返りながら，新たな知識や考え方を，１つ１つ，丁寧に，あなたと一緒に積み重ね，さらに演習で理解を深めることが可能です。

予習は必要ありません。「講義動画」で，いちから説明します！

テキストの使い方，講座の受講の仕方については，後ほど詳しく説明します。

この講座を受講いただくことで，学校の授業の理解をより深めたり，学校から課された宿題を解きながらそこで問われている内容を確認したり，といったことが可能になります。しかし，この講座で扱う内容は，決して簡単ではありません。だからこそ，あなたがこの講座を通じて数学Ｂ＋Ｃ(ベクトル)と本気で向き合うことで

「なるほど，そういうことか！」を積み重ね，自分の成長を実感する

ことができると確信しています。

「人から人へ」。それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。スタディサプリの講師は，いつでも「あなた」が真剣に学びに向かう姿を思い浮かべながら授業しています。あなたが本気で講師から学び，学んだことが何だったのかを考え，問題を通じてそれを確認し, 自分のものにする, そういった一連の体験をこの講座を通じて提供いたします。そして，あなたがそうして得たことを，様々なアウトプットを通じて，今度はあなたが誰かに伝えていただきたいと思います。

講義を１回受けてわからなければ，何度でも，自分のペースで，講義を見返すことが可能です。ただし，最初から完璧な理解を目指す必要はまったくありません。まずは「たぶんこういうことだろうな」といったように，全体像をざっくり捉えることから始めましょう。その状態で先に進み，前に習った知識を使うことで，その意味がわかる，というのも数学ならではですし，気になって前に戻り改めて理解を深める，ということも可能です。その学び方やペースは，他の人と比較する必要はありません。

学びにおいて，主役は「あなた」です

あなたの，あなたならではの学びを，この講座が力強くサポートします。

ようこそ『スタディサプリ』の世界へ！

山内　恵介

目次

第１章　数列

第１講　等差数列，等比数列

PART1　等差数列
PART2　等差数列の和
PART3　等比数列
PART4　等比数列の和

第２講　和の記号Σ，階差数列

PART1　和の記号Σ
PART2　Σの性質
PART3　Σを用いて和を求める
PART4　階差数列と一般項

第３講　いろいろな数列の和

PART1　数列の和と一般項
PART2　分数で表された数列の和
PART3　(等差数列)×(等比数列)の和
PART4　群数列

第４講　漸化式と数学的帰納法

PART1　漸化式
PART2　漸化式と一般項
PART3　数学的帰納法
PART4　数学的帰納法による様々な証明

第２章　統計的な推測

第５講　確率分布

PART1　確率変数と確率分布
PART2　確率変数の期待値
PART3　確率変数の分散と標準偏差
PART4　確率変数の変換

第６講　確率変数の和と積，二項分布

PART1　同時分布，確率変数の和の期待値
PART2　独立な確率変数
PART3　二項分布
PART4　二項分布の期待値，分散，標準偏差

第７講　正規分布

PART1　連続分布
PART2　正規分布
PART3　確率変数の標準化
PART4　二項分布の正規分布による近似

第８講　統計的な推測

PART1　母集団と標本，標本平均
PART2　標本平均の分布，標本比率の分布
PART3　母集団の推定
PART4　仮説検定

目次

第３章　平面ベクトル

第９講　平面上のベクトル

PART1　有向線分とベクトル，ベクトルの相等
PART2　ベクトルの加法，減法，実数倍
PART3　ベクトルの演算，ベクトルの平行
PART4　ベクトルの分解

第10講　ベクトルの成分表示，ベクトルの内積

PART1　ベクトルの成分と大きさ
PART2　ベクトルの成分と平行
PART3　ベクトルの内積
PART4　ベクトルの内積と成分，ベクトルのなす角

第11講　内積の性質，位置ベクトル

PART1　内積の性質
PART2　ベクトルの大きさと内積
PART3　位置ベクトル
PART4　共線条件

第12講　ベクトルと平面図形

PART1　等式を満たす点の位置
PART2　交点の位置ベクトル(係数比較)
PART3　交点の位置ベクトル(係数の和が１)
PART4　交点の位置ベクトル(三角形の高さ)

第13講　ベクトル方程式

PART1　直線のベクトル方程式
PART2　法線ベクトルと直線のベクトル方程式
PART3　円のベクトル方程式
PART4　ベクトルの終点の存在範囲

第４章　空間ベクトル

第14講　空間ベクトル

PART1　空間の座標
PART2　空間のベクトル
PART3　ベクトルの成分と演算，座標と成分表示
PART4　ベクトルの内積

第15講　空間図形とベクトル

PART1　位置ベクトル
PART2　空間ベクトルの内積と大きさ
PART3　共線条件
PART4　共面条件

第16講　空間図形の様々な問題，座標空間における図形

PART1　直線と平面の交点
PART2　直線と平面の垂直
PART3　直線のベクトル方程式
PART4　座標空間における図形

講座の受講の仕方

ここでは,効果的な講座の受講の仕方についてお伝えします。講座は大きく「テキスト」「講義動画」「解答」に分かれています。この３つを効果的に使い,実力を伸ばしていきましょう。

①　テキストについて

この講座のテキストは，講ごとに４つの PART(パート)に分かれています。

各 PART は，次のような項目で構成されています。

「例題」

⇒　その PART で習得すべき知識・技能を確認するための問題

「練習」

⇒　「例題」で得た知識・技能を確認する問題

「Point Pickup」

⇒　「例題」「練習」を解くために必要な知識・技能を整理

「確認問題」

⇒　「例題」「練習」で学んだことを確認するための問題

「例題」「練習」「Point Pickup」については，「動画」で解説を行います。ある講に含まれる PART の一部または全部が未習，または理解が不十分の状態で講義を受講いただいても，まったく問題ありません。また，予習は必要ありません。

②　講義動画について

受講の準備ができましたら,テキストと筆記用具を手元におき,動画を再生してください。そして,真剣に受講して,講師がこの動画を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。

各講に含まれる PART 内の動画は，２つのチャプターに分かれています。

（例）　第１講　等差数列，等比数列

PART1　等差数列　…　要点整理＆「例題」解説・「練習」解説

それぞれの PART における主な受講の流れを説明します。

(1)　まずは，要点整理としてこの PART で習得すべき用語や知識，公式およびその成り立ちを解説します。この要点整理の内容は，テキストには掲載しておりません。必要に応じて，ノート等に残しておきましょう。

その後,「Point Pickup」にて,要点整理を通じて習得したことをまとめ,確認します。

次に，「Point Pickup」でまとめ，確認した知識や考え方を元に，「例題」を解いていきます。それぞれの問題が，どのようにして解答に至るかを，そのプロセスも含めて動画でじっくり学んでください。途中で動画を一次停止しながら，途中計算等をテキストやノートに書いていただいて構いませんが，大切なのは集中して授業を受講することです。「別冊解答」には，講義問題の解答解説が掲載されておりますので，動画の途中計算をすべて書き写す必要はありません。書くことに集中するのではなく，講師の言葉の一つひとつにしっかりと耳を傾けてください。

⑵　次に，「例題」で確認した問題の解き方を参考にして，「練習」を自分で解いてみましょう。途中で解き方がわからなくなった場合は，そこで手を止めて結構です。解き終わったら，動画で解き方を確認してください。解答があっているか，間違っているか，だけでなく，解くときに使った考え方が同じかどうか，もし異なるならどういう違いがあるのか，などを確認しながら授業を受講しましょう。

⑶　さらに，解説された「例題」「練習」を，何も見ずに自分で解いてみましょう。途中で手が止まってしまった場合は，ノートや別冊解答を参照して，どこに止まった原因があったのかを振り返り，その続きからまた解き進めてみましょう。

各 PART の学習の流れを，今一度確認してみましょう。

要点整理→「Point Pickup」&「例題」→「練習」→「自分で問題を解く」

1 つの PART でおよそ 30 分～ 1 時間程度の受講時間となります。

各講に含まれる 4 つの PART の受講が終了すると，その講が終了します。時間がない時は，PART 単位の受講でも構いません。また，週末にまとめて 1 講分受講してもよいでしょう。

大切なのは

・「新しい知識や考え方を知って，思考の幅を広げる」

・「講師が伝えたこと」を「自分で他の人に伝えられるようにする」

・「問題が解けるようになることがゴールではなく，前提となる知識・考え方を学ぶ」

という気持ちで受講することです。

動画で学ぶことに慣れていない人や，数学が苦手な人は，最初は「授業が速い！」と感じるかもしれませんが，安心してください。この講座は，いつでも画面を停止できます。「ん？」と思ったら止めて，いま伝えられたことがどういう意味を持つのかを考えること，必要なら戻って何度も聞くこと。焦る必要はありません。そして，講座の受講を進めていくうちに，感じ取り，表現できるスキルが向上することで，一度で聞き取れる，感じ取れる内容が増えていくでしょう。

もう１つ大切なこと，それは

・「やっぱり自分はできないんだ……」は厳禁！

だということです。あきらめず，何度でもチャレンジすること。あなたには，あなたがまだ気付いていないかもしれない，「理解する力」が必ずあります。

③　復習について

その日の動画の受講が完了したら

・この PART・講から何を学んだか

を思い浮かべてみましょう。必要に応じてテキストをもう一度見直してみましょう。

また，後日，「例題」「類題」をもう一度解くことで，

・この PART・講を受講して何ができるようになったか

を確かめてみましょう。もし解法が全然思いつかない，すっかり忘れてしまった，という場合は，まずはノートや別冊解答を，それでも思い出せない場合は動画を見直してみましょう。記憶がよみがえるはずです。

・「復習することで，学んだことを自分のものにする」

という気持ちを忘れないようにしましょう。

④　確認問題について

①～③が終わると，自分がその PART の内容を本当に理解しているのかを，別の問題で確かめたくなるはずです。各 PART の終わりに**「確認問題」**を用意してあります。「例題」「類題」と同様，その PART で学んだ知識・考え方を確認することができる問題セットとなっていますので，この PART で学んだことを思い出しながら，自力で解いてみましょう。

解き終えたら，「別冊解答」を見て，解き方をチェックしてみましょう。

・「問題を解くことで，知識を引き出し，使う練習をする」

単なる反復練習ではなく，学んだことを思い出しながら解く，それを忘れないでください。

以上を繰り返すことにより，飛躍的に理解が深まり，数学Ｂ＋Ｃ(ベクトル)の世界観が少しずつ見えてくるようになってきます。

受講を続ける上で大切なのは

・ペースを作り，守る

ことです。各 PART，およそ 30 分～ 1 時間。それを，どこの曜日のどの時間帯に何 PART(何講)受講するのかを決めるとよいでしょう。そして，決めた曜日の決めた時間に，確実に受講する習慣を身につけましょう。学校で授業を受ける時間と同じように，時と場所を変えて『スタディサプリ』を受講する時間，数学Ｂ＋Ｃ(ベクトル)と本気で向きあう時間，これを確保してください。学校の宿題等，何があっても，決めたペースを守ることを心がけ，できない理由を作らないこと。それを愚直なまでに繰り返すことで，確実な「理解力向上」「実力向上」，そしてそれを実現している自分の姿があることに気付き，それが「自信」につながります。

この「高１・高２　スタンダードレベル数学Ｂ＋Ｃ(ベクトル)」は，あくまで数学Ｂ＋Ｃ(ベクトル)の「入門講座」です。入門は，簡単という意味ではなく，その先に進むために欠かすことのできない「作法」を身に付ける，ということです。受講後は，**「高１・高２ハイレベル数学Ｂ＋Ｃ(ベクトル)」**に進んでみてください。自分の知識がどのように活用できるのか，それを知れば，もっとできることを増やしたい，活用の幅を広げたい，そう思うはずです。それこそが，無限に広がる数学Ｂ＋Ｃ(ベクトル)の世界への第一歩を踏み出した瞬間です。

第 1 講　等差数列，等比数列

PART1　等差数列

例題

⑴　次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 10 項を求めよ。

（i）$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ \cdots\cdots$　　（ii）$50,\ 47,\ 44,\ 41,\ \cdots\cdots$

⑵　第 5 項が 4，第 10 項が 14 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，24 はこの数列の第何項か。

Point Pickup

練習

⑴　次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 20 項を求めよ。

（i）　1，6，11，16，……　　　　（ii）　100，94，88，82，……

⑵　第 3 項が 12，第 11 項が -4 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，0 はこの数列の第何項か。

PART2　等差数列の和

例題

(1)　初項 3，末項 21，項数 10 の等差数列の和を求めよ。

(2)　初項 60，公差 -6 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。また，S_{10} を求めよ。

(3)　初項 5，公差 9 の等差数列の第 11 項から第 20 項までの和を求めよ。

Point Pickup

練習

(1) 初項 3，公差 -7 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。また，S_{20} を求めよ。

(2) 初項 2，公差 4 の等差数列の第 20 項から第 40 項までの和を求めよ。

PART3　等比数列

例題

(1)　次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 5 項を求めよ。

(i)　2，6，18，54，……　　(ii)　100，-50，25，$-\dfrac{25}{2}$，……

(2)　第 3 項が 28，第 6 項が 224 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

Point Pickup

練習

(1)　次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 6 項を求めよ。

(i)　$-27,\ -9,\ -3,\ -1,\ \cdots\cdots$　　(ii)　$2,\ -3,\ \dfrac{9}{2},\ -\dfrac{27}{4},\ \cdots\cdots$

(2)　第 2 項が -6，第 5 項が 162 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

PART4　等比数列の和

例題

(1)　次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(i)　初項 3，公比 2

(ii)　初項 27，公比 $\dfrac{1}{3}$

(2)　初項 16，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列の第 6 項から第 10 項までの和を求めよ。

Point Pickup

練習

⑴　次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

（i）　初項 1，公比 3　　　　(ii)　初項 81，公比 $\frac{1}{4}$

⑵　初項 2，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列の第 3 項から第 6 項までの和を求めよ。

第 1 講　PART1 確認問題

1 等差数列 4，9，14，19，……において，

一般項 a_n は，$a_n=$ [ア] $n-$ [イ] である。

また，第 10 項は [ウエ] である。

2 等差数列 75，71，67，63，……において，

一般項 a_n は，$a_n=$ [オカ] $n+$ [キク] である。

また，第 20 項は [ケコ] である。

3 第 4 項が 11，第 10 項が -7 である等差数列の

一般項 a_n は，$a_n=$ [サシ] $n+$ [スセ] である。

また，2 はこの数列の第 [ソ] 項である。

第1講　PART2 確認問題

1 初項 20，公差 -4 の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \boxed{\text{アイ}}\,n^2 + \boxed{\text{ウエ}}\,n$$

である。また，$S_{10} = \boxed{\text{オカ}}$ である。

2 初項 -17，公差 3 の等差数列の第 11 項から第 20 項までの和は $\boxed{\text{キクケ}}$ である。

第 1 講　PART3 確認問題

1 等比数列 5，-15，45，-135，……において，

一般項 a_n は，$a_n=\boxed{ア}\cdot(\boxed{イウ})^{n-1}$ である。

また，第 5 項は $\boxed{エオカ}$ である。

2 等比数列 96，48，24，12，……において，

一般項 a_n は，$a_n=\boxed{キク}\cdot\left(\dfrac{1}{\boxed{ケ}}\right)^{n-1}$

である。

また，第 10 項は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サシ}}$ である。

3 第 3 項が 18，第 5 項が 162 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，公比は負の実数とする。

$$a_n=\boxed{ス}\cdot(\boxed{セソ})^{n-1}$$

第 1 講　PART4 確認問題

1　初項 8，公比 3 の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \boxed{ア}\left(\boxed{イ}^n - 1\right)$$

である。

2　初項 15，公比 -2 の等比数列の初項から第 n 項までの和
S_n は

$$S_n = \boxed{ウ}\left\{1 - \left(\boxed{エオ}\right)^n\right\}$$

である。

3　初項 20，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の第 5 項から第 10 項までの和は $\dfrac{\boxed{カキク}}{\boxed{ケコサ}}$ である。

第 2 講　和の記号Σ，階差数列

PART1　和の記号Σ

例題

(1)　次の式を，数列の各項を列挙した和の形で表せ。

(i)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2k-1)$　　(ii)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}2^k$

(2)　次の式を，和の記号Σを用いて表せ。

(i)　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$　　(ii)　$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+(n-1)\cdot n$

(3)　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k$ を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　次の式を，数列の各項を列挙した和の形で表せ。

(i)　$\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$　　(ii)　$\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}$

(2)　次の式を，和の記号Σを用いて表せ。

(i)　$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$　　(ii)　$1\cdot1+3\cdot2+5\cdot4+\cdots\cdots+(2n+1)\cdot2^n$

(3)　和 $\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^k$ を求めよ。

PART2　∑の性質

例題

次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k-4)$　　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}4k^3$

Point Pickup

練習

次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-1)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$　　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k^3+1)$

PART3　∑を用いて和を求める

例題

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　1^2，3^2，5^2，……

(2)　1，$1+2$，$1+2+3$，……

Point Pickup

練習

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　$1\cdot1$，$2\cdot4$，$3\cdot7$，……

(2)　1，$1+2$，$1+2+4$，……

PART4　階差数列と一般項

例題

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　1，4，8，13，19，……　　(2)　1，2，5，14，41，……

Point Pickup

練習

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　2，6，12，20，30，……　　(2)　5，7，11，19，35，……

第 2 講　PART1 確認問題

1 次の式を，数列の各項を列挙した和の形で表せ。

$$\sum_{k=1}^{4}(3k-2)=1+4+\boxed{ア}+\boxed{イウ}$$

2 次の式を，数列の各項を列挙した和の形で表せ。

$$\sum_{k=1}^{5}5^{k-1}=1+\boxed{エ}+25+\boxed{オカキ}+625$$

3 $3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+10^2=\boxed{ク}$

$\boxed{ク}$ は，次の①～④のうちから選べ。

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k$　② $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^2$

③ $\displaystyle\sum_{k=3}^{10}k^2$　④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k+2)^2$

4 $1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+(n+1)\cdot3^n$

$=\boxed{ケ}$

$\boxed{ケ}$ は，次の①～④のうちから選べ。

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot3^{k-1}$　② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot3^{k}$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k\cdot3^{k-1}$　④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k\cdot3^{k}$

5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cdot6^k=\frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}\left(\boxed{ス}^n-1\right)$

第 2 講　PART2 確認問題

次の和を求めよ。

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-5)=n(\boxed{ア}n-\boxed{イ})$

2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k-1)(k+2)=n(n^2+\boxed{ウ}n+\boxed{エ})$

3 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k^2+1)=\frac{1}{\boxed{オ}}n(n+\boxed{カ})(n^2+n+\boxed{キ})$

第２講　PART3 確認問題

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

1　$1\cdot1,\ 2\cdot3,\ 3\cdot5,\ 4\cdot7,\ \cdots\cdots$

和　$\dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}}n\left(n+\boxed{\text{イ}}\right)\left(\boxed{\text{ウ}}n-\boxed{\text{エ}}\right)$

2　$1,\ 1+3,\ 1+3+9,\ 1+3+9+27,\ \cdots\cdots$

和　$\dfrac{1}{\boxed{\text{オ}}}\left(\boxed{\text{カ}}^{n+1}-\boxed{\text{キ}}n-\boxed{\text{ク}}\right)$

第 2 講　PART4 確認問題

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1　1, 2, 7, 16, 29, ……

$$a_n = \boxed{\text{ア}}\,n^2 - \boxed{\text{イ}}\,n + \boxed{\text{ウ}}$$

2　3, 5, 11, 29, 83, ……

$$a_n = \boxed{\text{エ}}^{\,n-1} + \boxed{\text{オ}}$$

第 3 講　いろいろな数列の和

PART1　数列の和と一般項

例題

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n = n^2 - 3n$　　　(2)　$S_n = 3^n + 1$

Point Pickup

練習

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n=3n^2-2n+1$　　(2)　$S_n=2^{n+2}-4$

PART2　分数で表された数列の和

例題

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 5},\ \frac{1}{5\cdot 7},\ \cdots\cdots$$

Point Pickup

練習

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot 4},\ \frac{1}{4\cdot 7},\ \frac{1}{7\cdot 10},\ \cdots\cdots$$

PART3　（等差数列）×（等比数列）の和

例題

次の和 S を求めよ。

$$S=1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots\cdots+n\cdot3^n$$

Point Pickup

練習

次の和 S を求めよ。

$$S=2\cdot 1+4\cdot 2+6\cdot 2^2+\cdots\cdots+2n\cdot 2^{n-1}$$

PART4　群数列

例題

偶数の数列 2，4，6，8，…… を，第 n 群が n 個の偶数を含むように分ける。

$$2 \mid 4,\ 6 \mid 8,\ 10,\ 12 \mid 14,\ 16,\ 18,\ 20 \mid 22,\ \cdots\cdots$$

(1)　第 n 群の最後の偶数を求めよ。

(2)　第 n 群の最初の偶数を求めよ。

(3)　第 n 群に含まれる偶数の総和を求めよ。

Point Pickup

練習

奇数の数列 1，3，5，7，…… を，第 n 群が $2n-1$ 個の奇数を含むように分ける。

$$1 \mid 3,\ 5,\ 7 \mid 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17 \mid 19,\ 21,\ 23,\ 25,\ 27,\ 29,\ 31 \mid 33,\ \cdots\cdots$$

(1)　第 n 群の最後の奇数を求めよ。

(2)　第 n 群の最初の奇数を求めよ。

(3)　第 n 群に含まれる奇数の総和を求めよ。

第 3 講　PART1 確認問題

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1　$S_n = 2n^2 + 3n$

$a_n =$ ア $n +$ イ

2　$S_n = 5^n$

$a_1 =$ ウ

$n \geqq 2$ のとき　$a_n =$ エ $\cdot$ オ $^{n-1}$

第 3 講　PART2 確認問題

1　次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot5},\ \frac{1}{5\cdot9},\ \frac{1}{9\cdot13},\ \frac{1}{13\cdot17},\ \cdots\cdots$$

和 [ア]

[ア] は，次の①～④のうちから選べ。

① $\dfrac{n}{2n+3}$　　② $\dfrac{n}{4n+1}$

③ $\dfrac{4n}{4n+1}$　　④ $\dfrac{n-1}{4n-3}$

第 3 講　PART3 確認問題

1 次の和を求めよ。

$$S=1\cdot5+2\cdot5^2+3\cdot5^3+\cdots\cdots+n\cdot5^n$$

$$S=\frac{(\boxed{\text{ア}}\,n-\boxed{\text{イ}})\cdot5^{n+1}+\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$$

第 3 講　PART4 確認問題

等差数列 1，5，9，13，……を，第 n 群が n 個の数を含むように分ける。

1 | 5，9 | 13，17，21 | 25，29，33，37 | 41，……

1 第 n 群の最後の数は [ア] n^2 + [イ] n − [ウ] である。

2 第 n 群の最初の数は [エ] n^2 − [オ] n + [カ] である。

3 第 n 群に含まれる数の総和は

n([キ] n^2 − [ク]) である。

第 4 講　漸化式と数学的帰納法

PART1　漸化式

例題

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n-2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の第５項を求めよ。

(2)　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(i)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+4$　　(ii)　$a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n$

Point Pickup

練習

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の第 5 項を求めよ。

(2)　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(i)　$a_1=4$，$a_{n+1}=a_n-3$　　　(ii)　$a_1=\dfrac{1}{4}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$

PART2　漸化式と一般項

例題

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+n$

(2)　$a_1=6$，$a_{n+1}=4a_n-9$

Point Pickup

練習

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+4^n$

(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4$

PART3　数学的帰納法

例題

n を自然数とするとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ。

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

Point Pickup

練習

n を自然数とするとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ。

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

PART4　数学的帰納法による様々な証明

例題

(1)　n を 2 以上の自然数とするとき，数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$$

(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(i)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(ii)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，それを数学的帰納法によって証明せよ。

Point Pickup

練習

(1)　n を 4 以上の自然数とするとき，数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ。

$$2^n > 3n+1$$

(2)　$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2-1}{n+1}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(i)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(ii)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，それを数学的帰納法によって証明せよ。

第 4 講　PART1 確認問題

1　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+n^2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ において

$$a_2=\boxed{\text{ア}},\quad a_3=\boxed{\text{イ}},\quad a_4=\boxed{\text{ウエ}}$$

である。

2　$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+5$ で定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{\text{オ}}\,n-\boxed{\text{カ}}$$

である。

3　$a_1=2$，$a_{n+1}=-3a_n$ で定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{\text{キ}}\cdot\left(\boxed{\text{クケ}}\right)^{n-1}$$

である。

第 4 講　PART2 確認問題

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1　$a_1=4$，$a_{n+1}=a_n+2\cdot 3^n$

$a_n=\boxed{\text{ア}}^n+\boxed{\text{イ}}$

2　$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+3$

$a_n=\boxed{\text{ウ}}\cdot\boxed{\text{エ}}^{n-1}-\boxed{\text{オ}}$

第4講　PART3 確認問題

1　n を自然数とするとき，次の等式(A)が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \cdots\cdots(A)$$

(証明)

[1]　$n=$ [ア] のとき

(A)の左辺 $=$ [イ],

(A)の右辺 $=$ [ウ]

よって，$n=$ [ア] のとき，(A)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A)が成り立つと仮定すると

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

$n=k+1$ のとき

(A)の左辺

$=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+$ [エ]

$=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}$

$=\frac{1}{6}(k+1)\left(2k^2+\right.$ [オ] $k+$ [カ] $\left.\right)$

$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)\left(2k+\right.$ [キ] $\left.\right)$

$=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}$

となり，$n=k+1$ のときの(A)の右辺と一致する。

よって，$n=k+1$ のときにも(A)は成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，(A)が成り立つ。

(証明終わり)

ア ～ キ に当てはまる数や式を答えよ。

エ は，次の①～④のうちから選べ。

① k^2　　② k^2+1

③ $(k+1)^2$　　④ $(k-1)^2$

第 4 講　PART4 確認問題

1　n を 3 以上の自然数とするとき，次の不等式(A)が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

$3^n > 8n$　……(A)

（証明）

[1]　$n=$ **ア** のとき

(A)の左辺 $=$ **イウ** ，(A)の右辺 $=$ **エオ**

よって，$n=$ ア のとき，(A)は成り立つ。

[2]　$k \geqq 3$ として，$n=k$ のとき，(A)が成り立つと仮定すると

$3^k > 8k$

$n=k+1$ のとき

(A)の左辺 − (A)の右辺

$= 3^{k+1} -$ **カ**

$= 3 \cdot 3^k -$ カ

$> 3 \cdot$ **キ** $-$ カ

$=$ **クケ** $k -$ **コ** > 0

よって，$3^{k+1} >$ カ となり，$n=k+1$ のときにも(A)は成り立つ。

[1]，[2] より，3 以上のすべての自然数 n について，(A)が成り立つ。

（証明終わり）

ア ～ **コ** に当てはまる数や式を答えよ。

カ ， **キ** は，次の①～④のうちから選べ。

①　k　　②　$k+1$

③　$8k$　　④　$8(k+1)$

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

$$a_1=6,\ a_{n+1}=2a_n-3n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

まず，$a_1=6$，$a_2=$ [サ]，$a_3=$ [シス] より，

数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=$ [セ]$n+$[ソ]　……(A)と推測される。

これが正しいことを数学的帰納法で証明する。

（証明）

[1]　$n=1$ のとき

$a_1=$ [タ] となり，(A)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A)が成り立つと仮定すると

$a_k=$ [セ]$k+$[ソ]

$n=k+1$ のとき，与えられた漸化式より

$a_{k+1}=2a_k-3k$

$=2($[セ]$k+$[ソ]$)-3k$

$=$ [チ]$k+$[ツ]

$=$ [テ]$(k+1)+$[ト]

よって，$n=k+1$ のときにも(A)は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，(A)が成り立つ。

（証明終わり）

したがって，求める一般項は

$a_n=$ [セ]$n+$[ソ]

第5講　確率分布

PART1　確率変数と確率分布

例題

赤球5個，白球3個が入った袋から，3個の球を同時に取り出すとき，出る赤球の個数をXとする。

(1)　Xの確率分布を求めよ。

(2)　$P(X \leqq 1)$ を求めよ。

Point Pickup

練習

2 個のさいころを同時に投げて，出る目の最小値を X とする。

(1)　X の確率分布を求めよ。

(2)　$P(2 \leqq X \leqq 5)$ を求めよ。

PART2　確率変数の期待値

例題

6 枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ から無作為に 1 枚取り出したとき，そのカードに書かれている数を X とする。確率変数 X の期待値を求めよ。

Point Pickup

練習

5 枚の硬貨を同時に投げて，表が出る枚数を X とするとき，確率変数 X の期待値を求めよ。

PART3　確率変数の分散と標準偏差

例題

$1 \sim 9$ までの数字が書かれた9枚のカードから無作為に1枚取り出し，そのカードに書かれている数を X とする。X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

Point Pickup

練習

当たりくじ3本を含む10本のくじがある。このくじを1本ずつ2回引いたときの当たりくじの本数を X とする。引いたくじは元にもどさないとして，X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

PART4　確率変数の変換

例題

確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき，次の確率変数の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

(1)　$5X-1$　　(2)　$-X$

X	0	1	2	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

Point Pickup

練習

確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき，次の確率変数の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

(1)　$10X+2$　　(2)　$-5X-3$

X	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{35}{70}$	$\frac{20}{70}$	$\frac{10}{70}$	$\frac{4}{70}$	$\frac{1}{70}$	1

第 5 講　PART1 確認問題

2 個のさいころを同時に投げて，出る目の最大値を X とする。

1　X の確率分布を求めよ。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{\boxed{ア}}{36}$	$\frac{\boxed{イ}}{36}$	$\frac{\boxed{ウ}}{36}$	$\frac{\boxed{エ}}{36}$	$\frac{\boxed{オカ}}{36}$	1

2　$P(1 \leqq X \leqq 4)$ を求めよ。

$$P(1 \leqq X \leqq 4) = \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$$

第５講　PART2 確認問題

1　赤球 2 個，白球 3 個が入った袋から，2 個の球を同時に取り出すとき，出る赤球の個数を X とする。このとき，確率変数 X の期待値を求める。

X の確率分布は次のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{\boxed{ア}}{10}$	$\frac{\boxed{イ}}{10}$	$\frac{\boxed{ウ}}{10}$	1

よって，X の期待値は

$$E(X)=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$$

である。

第5講　PART3 確認問題

1　3枚の硬貨を同時に投げるとき，表が出る枚数を X とする。
X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

$$E(X)=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

$$V(X)=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

$$\sigma(X)=\frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

第 5 講　PART4 確認問題

確率変数 X の確率分布が次の表で与えられている。

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{20}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{30}$	1

このとき，次の確率変数の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

1　$3X+5$

期待値　$E(3X+5)=$ ［ア］

分散　$V(3X+5)=$ ［イウ］

標準偏差　$\sigma(3X+5)=\sqrt{［エオ］}$

2　$-6X+4$

期待値　$E(-6X+4)=$ ［カ］

分散　$V(-6X+4)=$ ［キク］

標準偏差　$\sigma(-6X+4)=$ ［ケ］$\sqrt{［コサ］}$

第 6 講　確率変数の和と積，二項分布

PART1　同時分布，確率変数の和の期待値

例題

100 円硬貨 2 枚と 10 円硬貨 3 枚を同時に投げる。

(1)　表が出た硬貨の枚数の期待値を求めよ。

(2)　表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

Point Pickup

練習

1 個のさいころを 3 回投げる。

(1)　出る目の和の期待値を求めよ。

(2)　1 回目は出た目を，2 回目は出た目を 3 倍したものを，3 回目は出た目を 10 倍したものをそれぞれ点数として得られるとき，合計点数の期待値を求めよ。

PART2　独立な確率変数

例題

1個のさいころを2回投げ，1回目，2回目に出る目をそれぞれ X，Y とする。

(1)　XY の期待値を求めよ。

(2)　$X+Y$ の分散を求めよ。

(3)　$X+2Y$ の分散を求めよ。

Point Pickup

練習

3枚の硬貨を投げ，表の出た枚数を X とする。また，1個のさいころを投げ，出た目が4以上のとき $Y=4$，それ以外の目が出たとき，その目を Y とする。

(1) XY の期待値を求めよ。

(2) $X+Y$ の分散を求めよ。

(3) $2X+3Y$ の分散を求めよ。

PART3　二項分布

例題

2 枚の硬貨を同時に 5 回投げるとき，2 枚とも表が出る回数を X とする。

(1)　X はどのような二項分布に従うか。$B(n,\ p)$ の形で答えよ。

(2)　2 枚とも表が出る回数が 3 回以上である確率を求めよ。

Point Pickup

練習

1 個のさいころを 4 回投げるとき，6 の目が出る回数を X とする。

(1)　X はどのような二項分布に従うか。$B(n,\ p)$ の形で答えよ。

(2)　6 の目が出る回数が 2 回以下である確率を求めよ。

PART4　二項分布の期待値，分散，標準偏差

例題

5 つの選択肢から 1 つを選ぶ選択式の問題が全部で 100 問ある。各問題においては正解が 1 つだけ存在する。この問題すべてに無作為に解答したときの正解数を X とする。

(1)　X の期待値を求めよ。

(2)　X の分散を求めよ。

(3)　X の標準偏差を求めよ。

Point Pickup

練習

赤球２個，白球３個が入った袋から，２個の球を同時に取り出し，色を確認してから袋に戻す。この試行を５回繰り返すとき，２個とも赤球である回数を X とする。

(1)　X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

(2)　各試行において，２個とも赤球が出れば 100 円を受け取ることができ，それ以外のときはお金を受け取れないとする。５回終了後に，受け取ることができる金額の期待値，分散を求めよ。

第 6 講　PART1 確認問題

6 つの面のうち，1 つには 1，2 つには 2，3 つには 3 の数字が書かれたさいころがある。このさいころを 3 回投げるとする。

1　出る目の和の期待値は ［ア］ である。

2　1 回目は出た目を 2 倍したものを，2 回目は出た目を 3 倍したものを，3 回目は出た目を 4 倍したものをそれぞれ点数として得られるとき，得られる合計点数の期待値は ［イウ］ である。

第 6 講　PART2 確認問題

表に 1，裏に 3 と書かれた 1 枚のコインを投げて，出た数を X とする。また，1 個のさいころを投げ，出た目が 4 以下のとき $Y=2$，それ以外の目が出たとき $Y=5$ とする。

1　XY の期待値を求めよ。

$E(XY)=$ ［ア］

2　$X+Y$ の分散を求めよ。

$V(X+Y)=$ ［イ］

3　$3X+4Y$ の分散を求めよ。

$V(3X+4Y)=$ ［ウエ］

第 6 講　PART3 確認問題

１個のさいころを５回投げるとき，１または２の目が出る回数を X とする。

1　X は，二項分布 ア に従う。

ア は，次の①～④のうちから選べ。

①　$B\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$　　②　$B\left(5,\ \frac{1}{3}\right)$

③　$B\left(5,\ \frac{2}{3}\right)$　　④　$B\left(\frac{1}{3},\ 5\right)$

2　１または２の目が出る回数が３回以下である確率は

$\dfrac{\boxed{イウエ}}{\boxed{オカキ}}$ である。

第６講　PART4 確認問題

赤球６個，白球４個が入った袋から２個の球を同時に取り出し，色を確認してから袋に戻す。この試行を 90 回繰り返すとき，２個とも赤球である回数を X とする。

1　X の期待値，分散，標準偏差を求めると

$E(X)=$ [アイ]

$V(X)=$ [ウエ]

$\sigma(X)=$ [オ] $\sqrt{\text{[カ]}}$

である。

2　各試行において，２個とも赤球が出れば 50 円を受け取ることができ，それ以外のときはお金を受け取れないとする。

90 回終了後に受け取る金額の期待値は [キクケコ] 円，

分散は [サシスセソ] である。

第 7 講　正規分布

PART1　連続分布

例題

確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=2x\,(0\leqq x\leqq 1)$ で与えられているとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P\left(\dfrac{1}{4}\leqq X\leqq\dfrac{3}{4}\right)$　　(2)　$P(0\leqq X\leqq 1)$

Point Pickup

練習

確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=\frac{8}{9}x\ \left(0\leqq x\leqq\frac{3}{2}\right)$ で与えられているとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P(0\leqq X\leqq 1)$

(2)　$P\left(\frac{1}{2}\leqq X\leqq\frac{3}{2}\right)$

PART2　正規分布

例題

確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P(0 \leqq Z \leqq 1.53)$　　(2)　$P(-1.42 \leqq Z \leqq -1)$　　(3)　$P(Z \geqq 2.3)$

Point Pickup

練習

確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P(0.26 \leqq Z \leqq 1.37)$

(2)　$P(Z \leqq -2)$

PART3　確率変数の標準化

例題

ある高校の高校２年生の身長が，平均 170.0cm，標準偏差 6cm の正規分布に従うものとする。

⑴　身長 164cm 以上 179cm 以下の生徒は約何％いるか。

⑵　身長が高い方から 12.3％の中に入るのは，何cm以上の生徒か。小数第２位を四捨五入して小数第１位まで求めよ。

Point Pickup

練習

ある高校の高校２年生に数学のテストを行ったところ，平均 48 点，標準偏差 15 点であった。このテストの得点が正規分布に従うとして，次の問いに答えよ。

(1)　81 点以上の生徒は約何％いるか。小数第２位を四捨五入して小数第１位まで求めよ。

(2)　得点が高い方から 33％に入るのは，何点以上の生徒か。

PART4　二項分布の正規分布による近似

例題

(1)　1 個のさいころを 180 回投げるとき，1 の目が出る回数が 36 回以上である確率を求めよ。

(2)　ある植物の種の発芽率は 60% である。この種を 600 粒まくとき，k 粒以上の種が発芽する確率が 75% 以上になるような k の最大値を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　ある製品が不良品である確率は 0.02 であるとする。この製品 2500 個中の不良品の個数が 36 個以下である確率を求めよ。

(2)　2 択問題 100 問を出題し，k 問以上正解した人を合格とする。考えることなくでたらめに選んだときの合格率が 2% 以下になるような k の最小値を求めよ。

第 7 講　PART1 確認問題

確率変数 X の確率密度関数が

$$f(x)=\frac{9}{8}x\left(0\leqq x\leqq\frac{4}{3}\right)$$

で与えられているとき，次の確率を求めよ。

1 $P\left(0\leqq X\leqq\frac{2}{3}\right)=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$

2 $P\left(\frac{1}{3}\leqq X\leqq 1\right)=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$

第 7 講　PART2 確認問題

確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，以下の
<正規分布表>を用いて次の確率を求めよ。

<正規分布表>

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

1　$P(0.42 \leqq Z \leqq 1.28) = 0.$ アイウエ

2　$P(Z \leqq -1.6) = 0.$ オカキク

第 7 講　PART3 確認問題

ある模擬試験において，全受験生の平均は 52 点，標準偏差は 15 点であった。この試験の得点が正規分布に従うものとする。

次の＜正規分布表＞を用いて，以下の問いに答えよ。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

1　得点が 70 点以上の生徒は約 [アイ].[ウ]%いる。ただし，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

2　得点が高い方から 30.5%に入るのは，[エオ] 点以上の生徒である。

第 7 講　PART4 確認問題

次の＜正規分布表＞を用いて，以下の問いに答えよ。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

1　ある工場で作られる製品には 10％の割合で不良品が出るという。この製品を 1600 個選んだとき，含まれる不良品の個数が 145 個以下である確率は 0.［アイウエ］である。

2　1 個のさいころを 720 回投げるとき，1 の目が出る回数が k 回以上である確率が 70％以上になるような k の値の最大値は，［オカキ］である。

第 8 講　統計的な推測

PART1　母集団と標本，標本平均

例題

1，2，3，4と書かれたカードがそれぞれ4枚，3枚，2枚，1枚ある。この10枚のカードを母集団とし，カードに書かれた数字を変量とする。

(1)　母集団分布を求めよ。

(2)　母平均，母標準偏差を求めよ。

(3)　この母集団から大きさ4の標本を無作為抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とするとき，$\overline{X}$ の期待値，標準偏差を求めよ。

Point Pickup

練習

右の表は，20 個の球に書かれた数字とその個数である。この 20 個の球を母集団とし，球に書かれた数字を変量とする。

数字	1	2	3	4	5	計
個数	2	4	8	4	2	20

(1)　母平均，母標準偏差を求めよ。

(2)　この母集団から大きさ 16 の標本を無作為抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とするとき，$\overline{X}$ の期待値，標準偏差を求めよ。

PART2　標本平均の分布，標本比率の分布

例題

(1)　母平均 50，母標準偏差 20 の母集団から，大きさ 100 の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ が 52 以上となる確率を求めよ。

(2)　6 個中 1 個の割合で不良品である製品の山から，500 個の製品を無作為抽出するとき，92 個以上が不良品である確率を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　母平均 165，母標準偏差 4 の母集団から，大きさ 64 の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ が 164 以上 166 以下となる確率を求めよ。

(2)　ある市の市民の血液型は 1 割が AB 型である。この市のある献血ルームに来た市民 900 人のうち 100 人以上が AB 型である確率を求めよ。

PART3　母集団の推定

例題

(1)　ある県の 17 歳男子から 100 人を無作為抽出して身長を調べたところ，平均値が 170.2 cm，標準偏差 6.0 cm であった。この県の 17 歳男子の平均身長 m を，信頼度 95% で推定せよ。

(2)　ある工場で製造しているある製品から 2500 個を無作為抽出して調べたところ，50 個の不良品が含まれていた。この工場で製造しているこの製品の不良品率 p を信頼度 95% で推定せよ。

Point Pickup

練習

(1)　ある牛乳 400 本を無作為抽出して乳脂肪分を測定したところ，平均値が 3.6%，標準偏差 0.45% であった。この牛乳の乳脂肪分の平均値 m を信頼度 95% で推定せよ。

(2)　ある高校の 1 年生から 100 人を無作為抽出して調べたところ，自転車通学者は 36 人であった。この高校の 1 年生全体における自転車通学者の割合 p を信頼度 95% で推定せよ。

PART4　仮説検定

例題

ある硬貨を 400 回投げたところ，表が 217 回出た。有意水準を 5% として，次のことがいえると判断してよいかをそれぞれ検定せよ。

(1)　この硬貨は表が出やすい。

(2)　この硬貨は表と裏の出方に偏りがある。

Point Pickup

練習

ある１つのさいころを 180 回投げたところ，１の目が 39 回出た。有意水準を 5% として，次のことがいえると判断できるかをそれぞれ検定せよ。

(1)　このさいころの１の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ ではない。

(2)　このさいころは１の目が出やすい。

第 8 講　PART1 確認問題

次の表は，100 枚のカードに書かれた数字とその枚数である。

数字	1	3	5	7	計
枚数	40	30	20	10	100

この 100 枚のカードを母集団とし，カードに書かれた数字を変量とする。

1　母平均，母標準偏差を求めると

$m=$ ア ，$\sigma=$ イ である。

2　この母集団から大きさ 25 の標本を無作為抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とするとき，$\overline{X}$ の期待値と標準偏差を求めると

$E(\overline{X})=$ ウ

$\sigma(\overline{X})=$ エ . オ

である。

第 8 講　PART2 確認問題

次の＜正規分布表＞を用いて，以下の問いに答えよ。

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531

1　母平均 80，母標準偏差 50 の母集団から，大きさ 100 の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ が 75 以上 84 以下となる確率は 0.［アイウエ］である。

2　ある市の市民の血液型は 4 割が A 型である。いま，この市の市民の中から無作為に 600 人を選ぶとき，A 型の人が 246 人以上である確率は 0.［オカキク］である。

第 8 講　PART3 確認問題

1 ある農園でつくられているいちごの中から 100 個を無作為抽出し，その重さを測定したところ，平均値が 37.4g，標準偏差が 5.0g であった。この農園のいちごの重さの平均値 m を，信頼度 95％で推定すると，［アイ］．［ウ］g 以上［エオ］．［カ］g 以下となる。
ただし，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位までの数で答えよ。

2 ある市の高校生から 600 人を無作為に抽出して，虫歯がある生徒を調べたところ，240 人であった。この市の高校生全体における，虫歯の保有率 p を信頼度 95％で推定すると，その信頼区間は 0.［キクケ］$\leqq p \leqq$ 0.［コサシ］となる。
ただし，小数第 4 位を四捨五入して小数第 3 位までの数で答えよ。

第 8 講　PART4 確認問題

ある1つのさいころを720回投げたところ，6の目が102回出た。有意水準を5%として，次のことがいえると判断できるかをそれぞれ検定せよ。
ただし，正規分布表において，次の値を利用してもよい。

$P(0 \leqq Z \leqq 1.64) \fallingdotseq 0.45$

$P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$

1　このさいころの6の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ ではない。

ア

次の①，②のうち適するものを選べ。

①　判断できる　　　　②　判断できない

2　このさいころは6の目が出にくい。

イ

次の①，②のうち適するものを選べ。

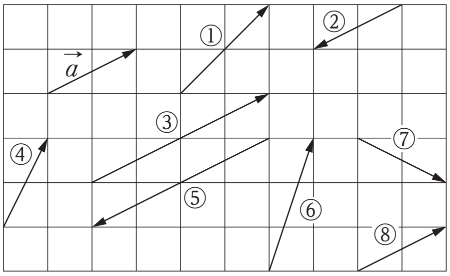
①　判断できる　　　　②　判断できない

第 9 講　平面上のベクトル

PART1　有向線分とベクトル，ベクトルの相等

例題

右の図において，次のようなベクトルの組をすべて答えよ。



(1)　$\vec{a}$ と大きさが等しいベクトル

(2)　$\vec{a}$ と向きが等しいベクトル

(3)　$\vec{a}$ と等しいベクトル

(4)　$\vec{a}$ の逆ベクトル

Point Pickup

練習

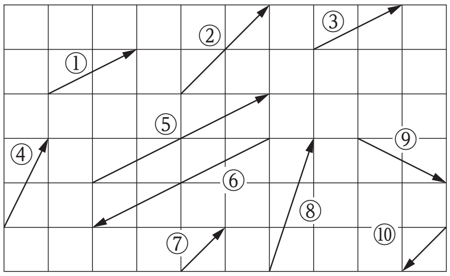
右の図において，次のようなベクトルの組をすべて答えよ。

(1)　大きさが等しいベクトル

(2)　向きが等しいベクトル

(3)　等しいベクトル

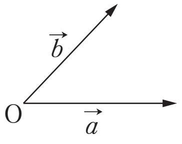
(4)　逆ベクトル



PART2　ベクトルの加法，減法，実数倍

例題

右の図のようにベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを，点Ｏを始点とする有向線分で図示せよ。



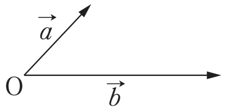
(1)　$2\vec{a}$　　(2)　$-\frac{1}{2}\vec{b}$　　(3)　$\vec{a}+\vec{b}$

(4)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(5)　$2\vec{b}-\vec{a}$

Point Pickup

練習

右の図のようにベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを，点 O を始点とする有向線分で図示せよ。



(1)　$3\vec{a}$　　(2)　$-\frac{2}{3}\vec{b}$　　(3)　$\vec{a}+\vec{b}$

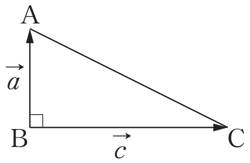
(4)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(5)　$-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

PART3　ベクトルの演算，ベクトルの平行

例題

(1)　等式 $\vec{x}-\vec{y}=\vec{a}$，$2\vec{x}+\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BC}=2$，$\angle\mathrm{B}=90°$ の直角三角形 ABC がある。
$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



(i)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と同じ向きの単位ベクトル

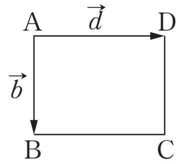
(ii)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と平行な単位ベクトル

Point Pickup

練習

(1) 等式 $5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}$，$3\vec{x}+5\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{AD}=4$ の長方形 ABCD がある。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。



(i) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きの単位ベクトル

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と平行な単位ベクトル

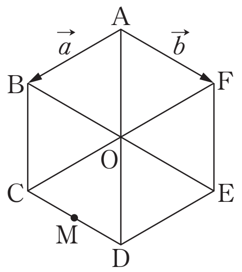
PART4　ベクトルの分解

例題

正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とし，対角線 BE と対角線 CF の交点を O，辺 CD の中点を M とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{FC}$　(2)　$\overrightarrow{MC}$　(3)　$\overrightarrow{AO}$

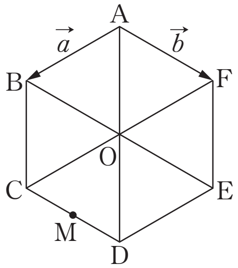
(4)　$\overrightarrow{AM}$　(5)　$\overrightarrow{FB}$



Point Pickup

練習

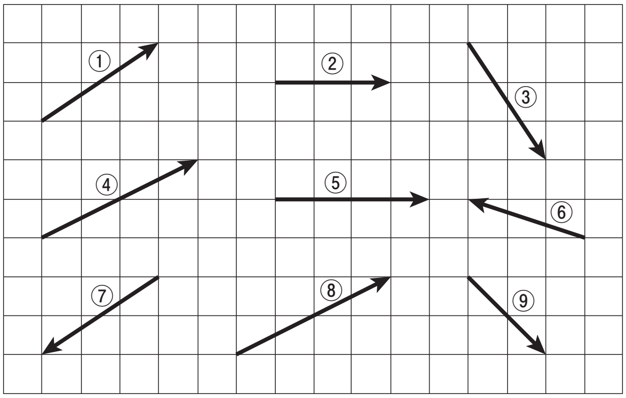
正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とし，対角線 BE と対角線 CF の交点を O，辺 CD の中点を M とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



(1)　$\overrightarrow{OA}$　　(2)　$\overrightarrow{MF}$　　(3)　$\overrightarrow{BF}$

第 9 講　PART1 確認問題

次の図のような９個のベクトル①～⑨がある。



次のようなベクトルの組を①～⑨のうちから選べ。ただし，複数ある場合は番号の小さい方から順に答えよ。

1　大きさが等しいベクトル

①と［ア］と［イ］，［ウ］と［エ］

2　向きが等しいベクトル

②と［オ］，［カ］と［キ］

3　等しいベクトル

［ク］と［ケ］

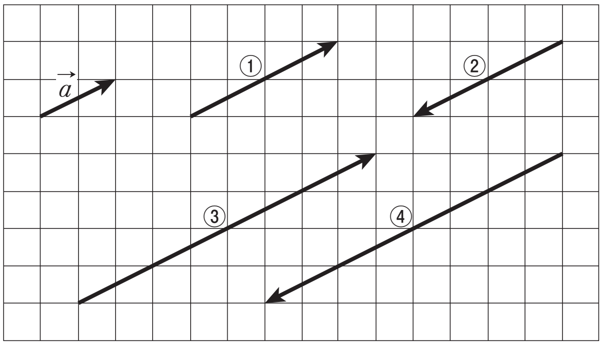
4　逆ベクトル

［コ］と［サ］

第 9 講　PART2 確認問題

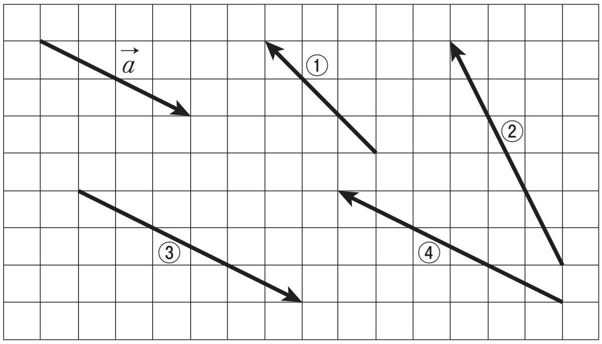
1　次の図で，$4\vec{a}$ を表すベクトルを①～④のうちから選べ。

ア



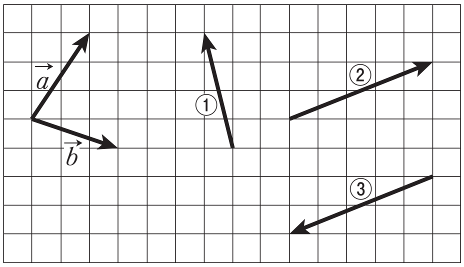
2　次の図で，$-\dfrac{3}{2}\vec{a}$ を表すベクトルを①～④のうちから選べ。

イ



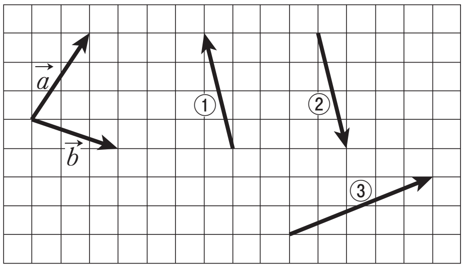
3 次の図で，$\vec{a}+\vec{b}$ を表すベクトルを①～③のうちから選べ。

ウ

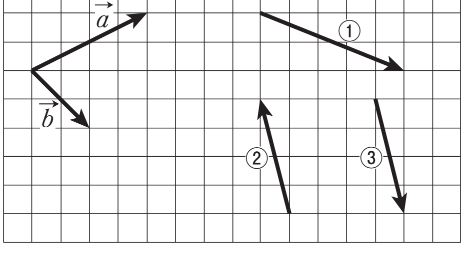


4 次の図で，$\vec{a}-\vec{b}$ を表すベクトルを①～③のうちから選べ。

エ



5 次の図で，$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$ を表すベクトルを①～③のうちから選べ。 オ



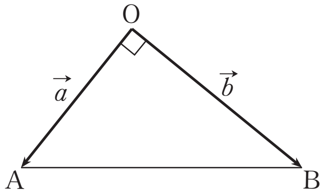
第 9 講　PART3 確認問題

1 等式 $\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}$，$3\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと，

$$\vec{x}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{b},\quad \vec{y}=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{a}-\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{b}$$

である。

OA＝3，OB＝4，$\angle$AOB＝90° の直角三角形 OAB がある。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。



2 $\overrightarrow{OA}$ と同じ向きの単位ベクトルは，$\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{a}$ である。

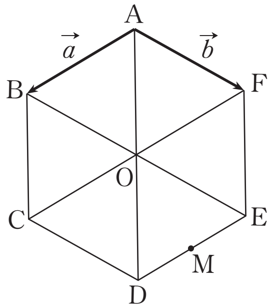
3 $\overrightarrow{AB}$ と平行な単位ベクトルを，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと

$$\frac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}\vec{a}+\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\vec{b}$$

$$\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}\vec{a}-\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\vec{b}$$

第 9 講　PART4 確認問題

正六角形 ABCDEF において，対角線 BE と CF の交点を O，辺 DE の中点を M とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを①～⑧のうちから選べ。



1 $\overrightarrow{BE}=$ ア

① $2\vec{b}$　② $-2\vec{b}$　③ $\vec{a}-\vec{b}$

④ $-\vec{a}+\vec{b}$　⑤ $-\vec{a}-\vec{b}$　⑥ $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

⑦ $-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$　⑧ $\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$

2 $\overrightarrow{CB}=$ イ

① $2\vec{b}$　② $-2\vec{b}$　③ $\vec{a}-\vec{b}$

④ $-\vec{a}+\vec{b}$　⑤ $-\vec{a}-\vec{b}$　⑥ $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

⑦ $-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$　⑧ $\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$

3 $\overrightarrow{CE}=$ ウ

① $2\vec{b}$　② $-2\vec{b}$　③ $\vec{a}-\vec{b}$

④ $-\vec{a}+\vec{b}$　⑤ $-\vec{a}-\vec{b}$　⑥ $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

⑦ $-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$　⑧ $\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$

4 $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=$ [エ]

① $2\vec{b}$　② $-2\vec{b}$　③ $\vec{a}-\vec{b}$

④ $-\vec{a}+\vec{b}$　⑤ $-\vec{a}-\vec{b}$　⑥ $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

⑦ $-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$　⑧ $\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$

5 $\overrightarrow{\mathrm{CM}}=$ [オ]

① $2\vec{b}$　② $-2\vec{b}$　③ $\vec{a}-\vec{b}$

④ $-\vec{a}+\vec{b}$　⑤ $-\vec{a}-\vec{b}$　⑥ $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

⑦ $-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$　⑧ $\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$

第 10 講　ベクトルの成分表示，ベクトルの内積

PART1　ベクトルの成分と大きさ

例題

$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-3,\ 6)$ のとき，次のベクトルを成分で表し，その大きさを求めよ。

(1)　$3\vec{a}-2\vec{b}$　　　(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$

Point Pickup

練習

$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(7,\ 1)$ のとき，次のベクトルを成分で表し，その大きさを求めよ。

(1) $-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$　　(2) $\vec{a}+t\vec{b}$

PART2　ベクトルの成分と平行

例題

(1)　$\vec{c}=(3,\ 1)$ と平行な単位ベクトルを成分で表せ。

(2)　2 つのベクトル $\vec{a}=(5,\ 2)$，$\vec{b}=(x,\ 8)$ が平行になるときの x の値を求めよ。

Point Pickup

練習

(1) $\vec{c}=(2,\ -3)$ と同じ向きの単位ベクトルを成分で表せ。

(2) 2 つのベクトル $\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ x)$ について，$2\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が平行になるときの x の値を求めよ。

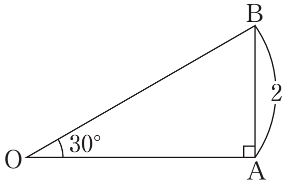
PART3　ベクトルの内積

例題

右の図において，次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$

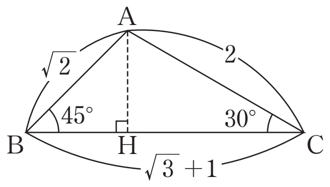
(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BO}$　(4) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OA}$



Point Pickup

練習

右の図において，次の内積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$　　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}$

(3) $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AH}$　　(4) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC}$

PART4　ベクトルの内積と成分，ベクトルのなす角

例題

(1)　次の２つのベクトルの内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(i)　$\vec{a}=(-1,\ 5)$，$\vec{b}=(2,\ 3)$　　(ii)　$\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$

(2)　$\vec{a}=(-6,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ x)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるような x の値を求めよ。

また，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるような x の値を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　2 つのベクトル $\vec{a}=(-\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -\sqrt{3})$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(2)　$\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(5,\ 2)$，$\vec{x}=(t-2,\ 4)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{x}$ が垂直になるような t の値を求めよ。また，$\vec{x}+\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直になるような t の値を求めよ。

第 10 講　PART1 確認問題

1　$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(-9,\ 3)$ のとき，

ベクトル $2\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$ の成分および大きさを求めよ。

成分　$(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}})$

大きさ　$\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$

2　$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ 4)$ のとき，

ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の成分および大きさを求めよ。

成分　$(-\boxed{\text{オ}}t+\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}}t+\boxed{\text{ク}})$

大きさ　$\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}t^2+\boxed{\text{サシ}}t+\boxed{\text{スセ}}}$

第10講　PART2 確認問題

1　$\vec{a}=(3,\ 4)$ と同じ向きの単位ベクトルの成分は,

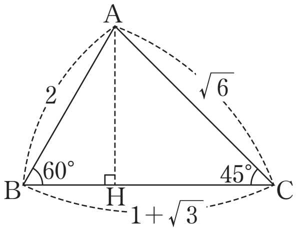
$\left(\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\right)$ である。

2　2つのベクトル $\vec{a}=(4,\ -5)$, $\vec{b}=(-1,\ x)$ について,

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+2\vec{b}$ が平行になるとき, $x=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

第10講　PART3 確認問題

右の図の △ABC において，
次の内積を求めよ。



1 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=$ ア

2 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HA}=$ イウ

3 $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AH}=$ エ

4 $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HB}=\sqrt{\text{オ}}$

第10講　PART4 確認問題

1 $\vec{a}=(1,\ 4)$，$\vec{b}=(-3,\ 5)$ のとき，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ [アイ] である。

また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると，

$\theta=$ [ウエ]$^\circ$ である。

2 $\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(x,\ -6)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるような x の値は，$x=$ [オ] である。

3 $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 4)$，$\vec{x}=(-4,\ t)$ のとき，$\vec{x}+\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直になるような t の値は，

$t=$ [カキ]，[ク] である。

第 11 講　内積の性質，位置ベクトル

PART1　内積の性質

例題

(1)　次の等式を証明せよ。

(i)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$　　(ii)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(iii)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ のとき，$2\vec{a}+\vec{b}$ の大きさを求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　次の等式を証明せよ。

(i)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(ii)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ のとき，$2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

PART2　ベクトルの大きさと内積

例題

次の条件を満たす 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$|3\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$

(2)　$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=2$，$3\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直

Point Pickup

練習

次の条件を満たす 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1)　$|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $|2\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{19}$

(2)　$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+6\vec{b}$ が垂直

PART3　位置ベクトル

例題

3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　辺 AB を 2：1 に内分する点 P　　(2)　辺 AC を 4：1 に外分する点 Q

(3)　△APQ の重心 G

Point Pickup

練習

3 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ において，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　辺 AC を 1：2 に内分する点 P　　(2)　辺 BC を 2：5 に外分する点 Q

(3)　$\triangle CPQ$ の重心 G

PART4　共線条件

例題

△ABC において，辺 AB を 2：1 に内分する点を P，辺 AC の中点を M，線分 BM の中点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 P，Q，C は一直線上にあることを証明せよ。

(3) PQ：QC を求めよ。

Point Pickup

練習

△ABC において，辺 AB を 3：2 に内分する点を D，辺 BC を 2：1 に外分する点を E，辺 BC の中点を M とし，△ABC の重心を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 3 点 D，G，E は一直線上にあることを証明し，DG：GE を求めよ。

第11講　PART1 確認問題

1 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=$ ［ア］

［ア］は，次の①～④のうちから選べ。

① $|\vec{a}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}$

② $|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

③ $|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

④ $|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

2 $|\vec{a}-2\vec{b}|^2=$ ［イ］

［イ］は，次の①～④のうちから選べ。

① $|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2$

② $|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2$

③ $|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

④ $|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

3 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ のとき，

$3\vec{a}+2\vec{b}$ の大きさは $\sqrt{\text{ウエ}}$ である。

第11講　PART2 確認問題

1　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=3$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ [ア] であり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$\cos\theta=\dfrac{[イ]}{[ウ]}$ である。

2　$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=1$ であり，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-6\vec{b}$ が垂直である。このとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ [エ] であり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta\ (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると，$\theta=$ [オカ]$^\circ$ である。

第 11 講　PART3 確認問題

3 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ において，次の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

1　線分 AB を 3：2 に内分する点 $P(\vec{p})$

$$\vec{p}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{b}$$

2　線分 AC を 7：2 に外分する点 $Q(\vec{q})$

$$\vec{q}=-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\vec{c}$$

3　$\triangle APQ$ の重心 $G(\vec{g})$

$$\vec{g}=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\vec{b}+\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}\vec{c}$$

第11講　PART4 確認問題

△ABC において，辺 AB を 1：3 に内分する点を P，辺 AC の中点を Q，辺 BC を 3：1 に外分する点を R とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする。

1　$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{AR}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと，

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{b},\quad \overrightarrow{AQ}=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{AR}=-\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{b}+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{c}$$

である。

2　$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと，

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}\vec{b}+\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{PR}=\frac{\boxed{セソ}}{\boxed{タ}}\vec{b}+\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\vec{c}$$

である。

3　3点P，Q，Rが一直線上にあることを証明する。

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\left(-\vec{b}+\boxed{ナ}\,\vec{c}\right)$$

$$\overrightarrow{PR}=\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\left(-\vec{b}+\boxed{ネ}\,\vec{c}\right)$$

であるから，

$$\overrightarrow{PR}=\boxed{ノ}\,\overrightarrow{PQ}$$

よって，3点P，Q，Rは一直線上にある。

また，PQ：QR＝$\boxed{ハ}$：$\boxed{ヒ}$ である。

【MEMO】

第12講　ベクトルと平面図形

PART1　等式を満たす点の位置

例題

△ABC と点 P が $\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{9}\overrightarrow{AC}$ を満たす。また，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする。このとき，AP：PQ，BQ：QC を求めよ。

Point Pickup

練習

△ABC と点 P が $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{10}\overrightarrow{AC}$ を満たす。また，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする。このとき，AP：PQ，BQ：QC を求めよ。

PART2　交点の位置ベクトル(係数比較)

例題

△ABC において, 辺 AB を 1:2 に内分する点を D, 辺 AC を 3:2 に内分する点を E とし, 線分 BE と線分 CD の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ として, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

Point Pickup

練習

△OAB において，辺 OA を 2：1 に内分する点を C，辺 OB の中点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

PART3　交点の位置ベクトル（係数の和が 1）

例題

△ABC において，辺 BC を 1：2 に内分する点を D，辺 CA を 3：2 に内分する点を E とする。

また，線分 AD と線分 BE の交点を F とする。

(1) $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表し，BF：FE，AF：FD を求めよ。

Point Pickup

練習

△ABC において，辺 AB，BC を 1：2 に内分する点をそれぞれ D，E とし，線分 CD と線分 AE の交点を F とする。

⑴　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ。

⑵　$\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表し，DF：FC，AF：FE を求めよ。

PART4　交点の位置ベクトル（三角形の高さ）

例題

$AB=4$，$AC=5$，$\angle A=60^\circ$ の $\triangle ABC$ において，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC の交点を H とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。　　(2)　$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

Point Pickup

練習

$AB=3$，$AC=2$，$\angle A=120^\circ$ の $\triangle ABC$ において，辺 BC 上に点 H を $AH\perp BC$ となるようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。　　(2)　$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

第12講　PART1 確認問題

1　平面上の $\triangle\mathrm{ABC}$ と点Pが，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たしている。直線APと直線BCの交点をQとするとき，

$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=$ ［ア］：［イ］

$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=$ ［ウ］：［エ］

である。

第12講　PART2 確認問題

1　△OAB において，辺 OA を 2：1 に内分する点を C，辺 OB を 3：2 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表す。

AP：PD＝s：$(1-s)$ とすると，

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}s\vec{b}$$

BP：PC＝t：$(1-t)$ とすると，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

よって，s，t の値は，$s=\boxed{\text{オ}}$，$t=\boxed{\text{カ}}$ であるから，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{b}$$ である。

$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ は，次の①～⑥のうちから選べ。

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{2}{5}$

④ $\frac{3}{5}$　⑤ $\frac{4}{9}$　⑥ $\frac{5}{9}$

第12講　PART3 確認問題

△ABC において，辺 BC を 2：1 に内分する点を D，辺 AC の中点を E とする。また, 線分 AD と線分 BE の交点を F とする。

1　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ をそれぞれ $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表すと

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AE}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{AC}$$

である。

2　$\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表すと

$$\overrightarrow{AF}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\overrightarrow{AC}$$ であり，

$$\text{BF}:\text{FE}=\boxed{\text{サ}}:\boxed{\text{シ}},$$

$$\text{AF}:\text{FD}=\boxed{\text{ス}}:\boxed{\text{セ}}$$

である。

第12講　PART4 確認問題

AB＝3，AC＝2，∠A＝60° の △ABC において，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC との交点を H とする。
このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表す。

1　内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}=$ ［ア］ である。

2　BH：HC＝s：$(1-s)$ とする。

AH⊥BC であることから s の値を求めると，$s=\dfrac{［イ］}{［ウ］}$

である。

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{［エ］}{［オ］}\vec{b}+\frac{［カ］}{［キ］}\vec{c}$$

である。

第13講　ベクトル方程式

PART1　直線のベクトル方程式

例題

次の直線の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ。

(1)　点 A$(4,\ 3)$ を通り，ベクトル $\vec{d}=(2,\ 1)$ に平行な直線

(2)　2点 A$(-1,\ 1)$，B$(2,\ -5)$ を通る直線

Point Pickup

練習

次の直線の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ。

(1)　点 A(3, 2) を通り，ベクトル $\vec{d}=(1,\ -3)$ に平行な直線

(2)　2 点 A$(-1,\ 0)$，B(0, 2) を通る直線

PART2　法線ベクトルと直線のベクトル方程式

例題

(1) 点 A$(3,\ -4)$ を通り，$\vec{n}=(2,\ -3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(2) 点 A$(0,\ -1)$ から直線 l：$x-3y+2=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする。H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ。

Point Pickup

練習

(1) 点 A$(5,\ -1)$ を通り，$\vec{n}=(1,\ 3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(2) 点 A$(4,\ 1)$ から直線 $l：2x-y+3=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする。H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ。

PART3　円のベクトル方程式

例題

平面上の定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ と動点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$|\vec{p}-\vec{a}|=1$　　　(2)　$|3\vec{p}-2\vec{a}|=6$

Point Pickup

練習

平面上の異なる 2 つの定点 A$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$ と動点 P$(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$|2\vec{p}-\vec{a}|=3$　　(2)　$|3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=5$

PART4　ベクトルの終点の存在範囲

例題

△OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ とする。実数 α，β が次の条件を満たすとき，点 P の存在範囲を求めよ。

(1)　$\alpha+2\beta=1$　　　(2)　$\alpha+\beta\leqq\frac{1}{2}$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$

Point Pickup

練習

$\triangle$OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。実数 α，β が次の条件を満たすとき，点 P の存在範囲を求めよ。

(1)　$3\alpha+\dfrac{1}{2}\beta=1$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$　　(2)　$\alpha+\beta\leqq 2$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$

第13講　PART1 確認問題

次の直線の方程式を，媒介変数を t とする媒介変数表示で表せ。

1　点 A$(-1,\ 3)$ を通り，$\vec{d}=(5,\ -2)$ に平行な直線

$$\begin{cases} x=\boxed{\text{アイ}}+\boxed{\text{ウ}}\,t \\ y=3-\boxed{\text{エ}}\,t \end{cases}$$

2　2 点 A$(-3,\ 1)$，B$(2,\ -5)$ を通る直線

$$\begin{cases} x=-3+\boxed{\text{オ}}\,t \\ y=\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{キ}}\,t \end{cases}$$

第13講　PART2 確認問題

1　点 A(3, 2) を通り，$\vec{n}=(4,\ -5)$ に垂直な直線の方程式は

$$\boxed{ア}x-\boxed{イ}y-\boxed{ウ}=0$$

である。

2　点 A(0, −3) から，直線 l：$x+2y-4=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする。

点 H の座標と線分 AH の長さを求める。

まず，直線 l の法線ベクトルの 1 つは

$\vec{n}=\left(1,\ \boxed{エ}\right)$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$ (k は実数) とおける。

このとき，$k=\boxed{オ}$ であるから，

点 H の座標は $\left(\boxed{カ},\ \boxed{キ}\right)$

$\mathrm{AH}=\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}$

である。

第13講　PART3 確認問題

1　平面上の定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ と動点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対し，ベクトル方程式 $|2\vec{p}-\vec{a}|=6$ の表す図形は円であり，この円の中心は［ア］，半径は［イ］である。

［ア］は，次の①～④のうちから選べ。

① 線分 OA の中点
② 線分 OA を 2：1 に内分する点
③ 線分 OA を 1：2 に内分する点
④ 線分 OA を 2：1 に外分する点

2　平面上の異なる 2 つの定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ と動点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対し，ベクトル方程式 $|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=10$ は，

$$\left|\vec{p}-\frac{\boxed{ウ}\,\vec{a}+\boxed{エ}\,\vec{b}}{\boxed{オ}}\right|=\boxed{カ}$$

と表すことができるので，この方程式の表す図形は，線分 AB を［キ］：［ク］に内分する点を中心とする半径［ケ］の円である。

第13講　PART4 確認問題

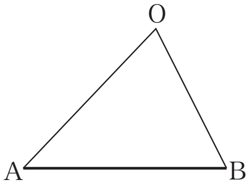
△OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ とする。

実数 α，β が次の条件を満たすとき，点Ｐはそれぞれどのような図形を描くか。

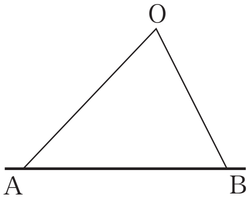
下の①～⑥のうちから選べ。

1　$2\alpha+\beta=1$　ア

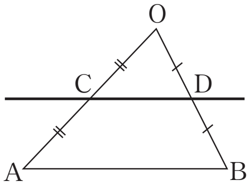
① 線分 AB



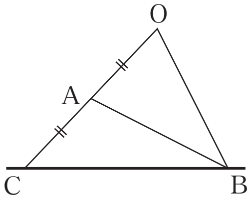
② 直線 AB



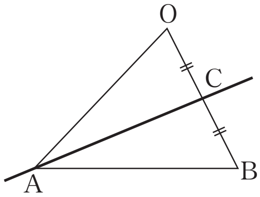
③ 直線 CD



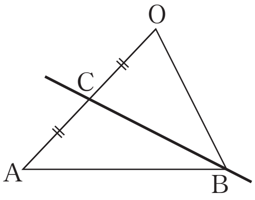
④ 直線 CB



⑤ 直線 AC

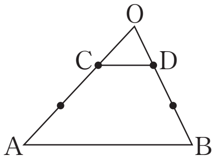


⑥ 直線 BC

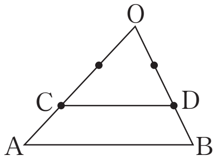


2　$\alpha+\beta \leqq \dfrac{2}{3}$，$\alpha \geqq 0$，$\beta \geqq 0$　　イ

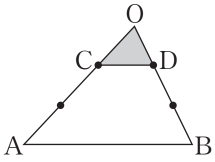
①　線分 CD



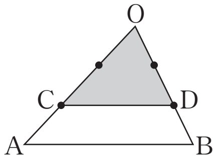
②　線分 CD



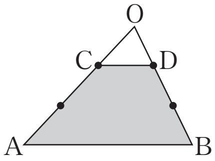
③　△OCD の周および内部



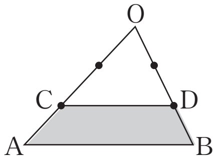
④　△OCDの周および内部



⑤　四角形 CABD の周および内部



⑥　四角形 CABD の周および内部



[MEMO]

第 14 講　空間ベクトル

PART1　空間の座標

例題

(1)　点 $P(1,\ 2,\ 3)$ に対して，次の点の座標を求めよ。

(i)　xy 平面に関して対称な点 A　　(ii)　yz 平面に関して対称な点 B

(iii)　zx 平面に関して対称な点 C　　(iv)　x 軸に関して対称な点 D

(v)　y 軸に関して対称な点 E　　(vi)　z 軸に関して対称な点 F

(vii)　点 $(0,\ -1,\ 5)$ に関して対称な点 G

(2)　2 点 $A(1,\ 1,\ 0)$，$B(3,\ -2,\ 4)$ の間の距離を求めよ。

Point Pickup

練習

⑴　点 $\mathrm{P}(-2,\ 1,\ -1)$ に対して，次の点の座標を求めよ。

(i)　xy 平面に関して対称な点 A　　(ii)　z 軸に関して対称な点 B

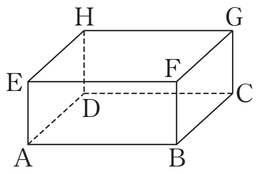
(iii)　点 $(-1,\ 1,\ 0)$ に関して対称な点 C

⑵　2 点 $\mathrm{A}(3,\ 2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 4,\ -1)$ の間の距離を求めよ。

PART2　空間のベクトル

例題

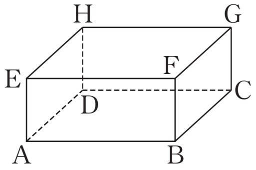
直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。このとき $\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{BH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



Point Pickup

練習

直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする。このとき $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



PART3　ベクトルの成分と演算，座標と成分表示

例題

(1) $\vec{a}=(1,\ -1,\ 2)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 1)$，$\vec{c}=(2,\ -1,\ -2)$ のとき，$|\vec{a}|$ を求めよ。また，$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。

(2) $\vec{a}=(1,\ -2,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ -2)$，$\vec{c}=(3,\ -2,\ -2)$ のとき，$\vec{p}=(-2,\ 3,\ -2)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

Point Pickup

練習

(1) $\vec{a}=(3,\ 1,\ 4)$，$\vec{b}=(-1,\ 6,\ 3)$，$\vec{c}=(-2,\ 5,\ 4)$ のとき，$|\vec{c}|$ を求めよ。また，$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。

(2) $\vec{a}=(0,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 2,\ -3)$，$\vec{c}=(3,\ 4,\ -1)$ のとき，$\vec{p}=(-6,\ 7,\ -3)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

PART4　ベクトルの内積

例題

A(2, 1, 0), B(0, 2, 1), C(1, 0, 2) とするとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ のなす角 θ を求めよ。また，△ABC の面積を求めよ。

Point Pickup

練習

A(2, 1, 2), B(4, 3, 6), C(0, 1, 0) とするとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角 θ を求めよ。また，△ABC の面積を求めよ。

第14講　PART1 確認問題

1　点 $P(2,\ 3,\ 1)$ と xy 平面に関して対称な点 A の座標は $(\boxed{ア},\ \boxed{イ},\ \boxed{ウエ})$ である。

2　点 $P(2,\ 3,\ 1)$ と x 軸に関して対称な点 B の座標は $(\boxed{オ},\ \boxed{カキ},\ \boxed{クケ})$ である。

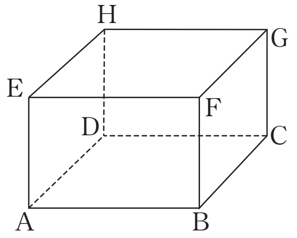
3　点 $P(2,\ 3,\ 1)$ と点 $(0,\ 1,\ 2)$ に関して対称な点 C の座標は $(\boxed{コサ},\ \boxed{シス},\ \boxed{セ})$ である。

4　2 点 $A(1,\ 3,\ 2)$，$B(0,\ -1,\ 4)$ の間の距離は $\sqrt{\boxed{ソタ}}$ である。

第14講　PART2 確認問題

直方体 ABCD－EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とおく。



次の ア ～ エ は，①～⑥のうちから選べ。

1　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=$ ア

①　$\vec{a}+\vec{c}$　　②　$-\vec{a}+\vec{c}$

③　$\vec{b}+\vec{c}$　　④　$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

⑤　$\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$　　⑥　$-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

2　$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=$ イ

①　$\vec{a}+\vec{c}$　　②　$-\vec{a}+\vec{c}$

③　$\vec{b}+\vec{c}$　　④　$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

⑤　$\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$　　⑥　$-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

3 $\overrightarrow{\mathrm{CE}}=$ ウ

① $\vec{a}+\vec{c}$　② $-\vec{a}+\vec{c}$

③ $\vec{b}+\vec{c}$　④ $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

⑤ $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$　⑥ $-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

4 $\overrightarrow{\mathrm{HB}}=$ エ

① $\vec{a}+\vec{c}$　② $-\vec{a}+\vec{c}$

③ $\vec{b}+\vec{c}$　④ $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

⑤ $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$　⑥ $-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

第14講　PART3 確認問題

1　$\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$ のとき，$|\vec{a}|=\sqrt{\boxed{アイ}}$ である。

2　$\vec{a}=(1,\ 0,\ -1)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 3)$，$\vec{c}=(-1,\ 2,\ 0)$ のとき，

$\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}=\left(\boxed{ウエ},\ \boxed{オ},\ \boxed{カキ}\right)$ である。

また，$\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$ の大きさは $\sqrt{\boxed{クケ}}$ である。

3　$\vec{a}=(1,\ 0,\ -1)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 3)$，$\vec{c}=(-1,\ 2,\ 0)$ のとき，

$\vec{p}=(1,\ 8,\ 3)$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと，

$$\vec{p}=\boxed{コ}\vec{a}+\boxed{サ}\vec{b}+\boxed{シ}\vec{c}$$

である。

第14講　PART4 確認問題

3点 A(1, 2, 0), B(0, 0, 2), C(2, 1, 4) がある。

1 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を θ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ とすると,

$\theta =$ $\boxed{アイ}$ $°$ である。

2 △ABC の面積は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

【MEMO】

第 15 講　空間図形とベクトル

PART1　位置ベクトル

例題

四面体 ABCD において，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。辺 AD の中点を M，辺 CD を 1：3 に内分する点を N，△ABC の重心を G とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{MN}$　　(2)　$\overrightarrow{NG}$

Point Pickup

練習

四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。辺 OA を 2：1 に内分する点を P，辺 BC の中点を Q，△ABC の重心を G とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$　　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{GQ}}$

PART2　空間ベクトルの内積と大きさ

例題

1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD がある。辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ の大きさを求めよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の値を求めよ。

Point Pickup

練習

1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD がある。辺 AB，CD の中点をそれぞれ P，Q とし，線分 PQ の中点を R とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。次の問いに答えよ。

⑴　$\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

⑵　$\overrightarrow{AR}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ。また，$\overrightarrow{AR}$ の大きさを求めよ。

⑶　$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BC}$ の値を求めよ。

PART3　共線条件

例題

(1) 空間の3点 A(3, 2, 6), B(5, −1, 4), C(x, y, 0) が一直線上にあるとき，x, y の値を求めよ。

(2) 平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を M, △BDE の重心を N とするとき，3点 C, N, M は一直線上にあることを示せ。

Point Pickup

練習

(1) 空間の 3 点 A$(a, -1, 5)$，B$(4, b, -7)$，C$(5, 5, -13)$ が一直線上にあるとき，a，b の値を求めよ。

(2) 平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を P，線分 PC を 1：2 に内分する点を Q とするとき，3 点 A，Q，G は一直線上にあることを示せ。

PART4　共面条件

例題

空間の4点 A$(1,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 2,\ 0)$, C$(0,\ 0,\ -1)$, D$(1,\ 2,\ z)$ が同一平面上にあるとき，z の値を求めよ。

Point Pickup

練習

空間の 4 点 A$(3,\ 1,\ 2)$，B$(4,\ 2,\ 3)$，C$(5,\ 2,\ 5)$，D$(-2,\ -1,\ z)$ が同一平面上にあるとき，z の値を求めよ。

第15講　PART1 確認問題

四面体ABCDにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。
辺ABの中点をM，辺CDを2：1に内分する点をN，△BCDの重心をGとするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

1　$\overrightarrow{MN}=-\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{b}+\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{c}+\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{d}$

2　$\overrightarrow{GM}=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{b}-\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{c}-\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\vec{d}$

第 15 講　PART2 確認問題

1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD がある。辺 AD，BC の中点をそれぞれ M，N とし，線分 MN を 1：2 に内分する点を P とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。

1　$\vec{c}\cdot\vec{d}$ の値を求めると $\vec{c}\cdot\vec{d}=\boxed{\text{ア}}$

2　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\vec{b}+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\vec{c}+\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\vec{d}$ である。

また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の大きさは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

3　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\boxed{\text{サ}}$ である。

第15講　PART3 確認問題

1　空間の 3 点 A(1, 3, 0)，B(4, 2, 1)，C(x, y, 2) が一直線上にあるとき，

$x=$ [ア]，$y=$ [イ]

である。

2　平行六面体 ABCD－EFGH において，辺 AE を 2：1 に内分する点を P とし，線分 PC を 2：3 に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とすると，

$\overrightarrow{AQ}=$ [ウ]，$\overrightarrow{AG}=$ [エ]

であるから，$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{\text{[オ]}}{\text{[カ]}}\overrightarrow{AG}$

よって，3 点 A，Q，G は一直線上にある。

[ウ]，[エ] は次の①～④のうちから選べ。

① $\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$　　② $\dfrac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$

③ $\dfrac{2}{3}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$　　④ $\dfrac{2}{5}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$

第15講　PART4 確認問題

1　空間の4点 A$(2,\ 0,\ 1)$，B$(0,\ 4,\ 2)$，C$(5,\ -1,\ 3)$，D$(1,\ 7,\ z)$ が同一平面上にあるとき，$z=$ ア である。

第 16 講　空間図形の様々な問題，座標空間における図形

PART1　直線と平面の交点

例題

四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。辺 AB を 2：1 に内分する点を P とし，線分 CP を 2：1 に内分する点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 辺 OA, OB の中点をそれぞれ D, E, 辺 OC を 1:2 に内分する点を F とする。3 点 D, E，F を含む平面と線分 OQ の交点を R とするとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

Point Pickup

練習

四面体ABCDにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。辺ABの中点をL，辺ACを3：2に内分する点をM，辺ADを1：2に内分する点をNとする。また，三角形BCDの重心をGとし, 3点L, M, Nを含む平面と線分AGの交点をHとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

PART2　直線と平面の垂直

例題

四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=4$，$\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ である。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，平面 ABC 上に点 H をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ と表すとき，s，t，u に成り立つ関係式を求めよ。

(3)　線分 OH と平面 ABC が垂直であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

Point Pickup

練習

四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle \mathrm{AOB}=\angle \mathrm{AOC}=60^\circ$，$\angle \mathrm{BOC}=90^\circ$ である。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，平面 ABC 上に点 O から垂線 OH を下ろしたとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

PART3　直線のベクトル方程式

例題

2 点 A$(5,\ -2,\ -3)$, B$(8,\ 0,\ -4)$ を通る直線に, 点 O から垂線 OH を下ろす。このとき, 点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

Point Pickup

練習

2 点 $\mathrm{A}(1,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 4,\ -1)$ を通る直線に，点 $\mathrm{C}(1,\ 5,\ -4)$ から垂線 CH を下ろす。このとき，点 H の座標と線分 CH の長さを求めよ。

PART4　座標空間における図形

例題

中心の座標が $(1,\ 0,\ -3)$ で，点 $(3,\ 3,\ -1)$ を通る球面を S とする。

(1)　S の方程式を求めよ。

(2)　S と xy 平面の交わりは円である。この円の中心と半径を求めよ。

(3)　S と平面 $z=k$ の交わりが半径 1 の円になるとき，k の値を求めよ。

Point Pickup

練習

2点 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 4)$, $\mathrm{B}(-5,\ 8,\ -2)$ を直径の両端とする球面を S とする。

⑴　S の方程式を求めよ。

⑵　S と yz 平面の交わりは円である。この円の中心と半径を求めよ。

⑶　S と平面 $y=k$ の交わりが半径4の円になるとき，k の値を求めよ。

第16講　PART1 確認問題

1　四面体OABCにおいて，辺OA，OBの中点をそれぞれD，Eとし，AB，CPの中点をそれぞれP，Qとする。また3点C，D，Eを含む平面と線分OQの交点をRとする。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{b}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{c}$$

である。

$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと

$$\overrightarrow{OR}=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{a}+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{b}+\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{c}$$

である。

第16講　PART2 確認問題

1 四面体OABCにおいて，OA＝OB＝3，OC＝2，

$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$，$\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}=60^\circ$ である。

点Oから平面ABCに垂線を引き，平面ABCとの交点をHとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{b}+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{c}$$

である。

第16講　PART3 確認問題

1　2点 A$(1,\ 0,\ 2)$，B$(2,\ 3,\ 1)$ を通る直線に，

点 C$(4,\ 5,\ -2)$ から垂線 CH を下ろす。

このとき，点 H の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$ である。

また，$\text{CH}=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

第16講　PART4 確認問題

2点 A(0, 1, −1), B(2, −5, 7) を直径の両端とする球面を S とする。

1　S の方程式は,

$$(x-\boxed{ア})^2+(y+\boxed{イ})^2+(z-\boxed{ウ})^2=\boxed{エオ}$$

である。

2　S と xy 平面の交わりは円である。

この円の中心の座標は $\left(\boxed{カ},\ \boxed{キク},\ \boxed{ケ}\right)$ であり,

半径は $\sqrt{\boxed{コサ}}$ である。

3　S と平面 $z=k$ の交わりが半径1の円になるとき,

$k=\boxed{シス},\ \boxed{セ}$ である。

テキスト　解答

第 1 講　等差数列，等比数列

PART1　等差数列

例題

(1)　次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 10 項を求めよ。

(i)　3，7，11，15，……　　(ii)　50，47，44，41，……

(2)　第 5 項が 4，第 10 項が 14 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，24 はこの数列の第何項か。

(1) (i)　初項 3，公差 4 の等差数列より，一般項は　$a_n=3+(n-1)\cdot4=4n-1$

$a_{10}=4\cdot10-1=39$

(ii)　初項 50，公差 -3 の等差数列より，一般項は　$a_n=50+(n-1)\cdot(-3)=-3n+53$

$a_{10}=-3\cdot10+53=23$

(2)　初項を a，公差を d とおくと，$a_n=a+(n-1)d$

$a_5=4$　より　$a+4d=4$　…… ①

$a_{10}=14$　より　$a+9d=14$　…… ②

①，②より $a=-4$，$d=2$　　よって，一般項は　$a_n=-4+(n-1)\cdot2=2n-6$

$a_n=24$ より $2n-6=24$　　$n=15$　　よって，24 は第 15 項

練習

(1)　次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 20 項を求めよ。

(i)　1，6，11，16，……　　(ii)　100，94，88，82，……

(2)　第 3 項が 12，第 11 項が -4 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，0 はこの数列の第何項か。

(1) (i)　初項 1，公差 5 の等差数列より，一般項は　$a_n=1+(n-1)\cdot 5=5n-4$

$a_{20}=5\cdot 20-4=96$

(ii)　初項 100，公差 -6 の等差数列より，一般項は　$a_n=100+(n-1)\cdot(-6)=-6n+106$

$a_{20}=-6\cdot 20+106=-14$

(2)　初項を a，公差を d とおくと，$a_n=a+(n-1)d$

$a_3=12$　より　$a+2d=12$　…… ①

$a_{11}=-4$　より　$a+10d=-4$　…… ②

①，②より $a=16$，$d=-2$　　よって，一般項は　$a_n=16+(n-1)\cdot(-2)=-2n+18$

$a_n=0$ より $-2n+18=0$　　$n=9$　　よって，0 は第 9 項

PART2　等差数列の和

例題

(1)　初項3，末項21，項数10の等差数列の和を求めよ。

(2)　初項60，公差 -6 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。また，S_{10} を求めよ。

(3)　初項5，公差9の等差数列の第11項から第20項までの和を求めよ。

(1)　$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(3+21)=120$

(2)　$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 60+(n-1)\cdot(-6)\}=\frac{1}{2}n(126-6n)=3n(21-n)$

$S_{10}=3\cdot 10\cdot(21-10)=330$

(3)　この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 5+(n-1)\cdot 9\}=\frac{1}{2}n(9n+1)$$

求める和は $S_{20}-S_{10}=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot(9\cdot 20+1)-\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(9\cdot 10+1)=1355$

(別解)

この数列の一般項を a_n とすると　$a_n=5+(n-1)\cdot 9=9n-4$

求める和は，初項 $a_{11}=95$，末項 $a_{20}=176$，項数 $20-11+1=10$ の等差数列の和より

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(95+176)=1355$$

練習

(1) 初項 3，公差 -7 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。また，S_{20} を求めよ。

(2) 初項 2，公差 4 の等差数列の第 20 項から第 40 項までの和を求めよ。

(1) $S_n=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot3+(n-1)\cdot(-7)\}=\dfrac{1}{2}n(13-7n)$

$S_{20}=\dfrac{1}{2}\cdot20\cdot(13-7\cdot20)=-1270$

(2) この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot2+(n-1)\cdot4\}=\frac{1}{2}n\cdot4n=2n^2$$

求める和は $S_{40}-S_{19}=2\cdot40^2-2\cdot19^2=2478$

（別解）

この数列の一般項を a_n とすると　$a_n=2+(n-1)\cdot4=4n-2$

求める和は，初項 $a_{20}=78$，末項 $a_{40}=158$，項数 $40-20+1=21$ の等差数列の和より

$$\frac{1}{2}\cdot21\cdot(78+158)=2478$$

PART3　等比数列

例題

(1)　次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 5 項を求めよ。

(i)　2，6，18，54，……　　(ii)　100，-50，25，$-\dfrac{25}{2}$，……

(2)　第 3 項が 28，第 6 項が 224 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

(1) (i)　初項 2，公比 3 の等比数列より，一般項は　$a_n=2\cdot3^{n-1}$

$$a_5=2\cdot3^4=162$$

(ii)　初項 100，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列より，一般項は　$a_n=100\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$a_5=100\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{25}{4}$$

(2)　初項を a，公比を r とおくと，$a_n=ar^{n-1}$

$a_3=28$ より $ar^2=28$　…… ①

$a_6=224$ より $ar^5=224$ …… ②

②÷①より $\dfrac{ar^5}{ar^2}=\dfrac{224}{28}$　　$r^3=8$

r は実数より $r=2$　　このとき①より $4a=28$　　$a=7$

よって，一般項は　$a_n=7\cdot2^{n-1}$

練習

(1)　次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第６項を求めよ。

(i)　$-27,\ -9,\ -3,\ -1,\ \cdots\cdots$　　(ii)　$2,\ -3,\ \dfrac{9}{2},\ -\dfrac{27}{4},\ \cdots\cdots$

(2)　第２項が -6，第５項が 162 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

(1)(i)　初項 -27，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列より，一般項は　$a_n=-27\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$a_6=-27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5=-\frac{1}{9}$$

(ii)　初項 2，公比 $-\dfrac{3}{2}$ の等比数列より，一般項は　$a_n=2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

$$a_6=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^5=-\frac{243}{16}$$

(2)　初項を a，公比を r とおくと，$a_n=ar^{n-1}$

$a_2=-6$ より $ar=-6$　…… ①

$a_5=162$ より $ar^4=162$ …… ②

②÷①より $\dfrac{ar^4}{ar}=\dfrac{162}{-6}$　　$r^3=-27$

r は実数より $r=-3$　　このとき①より $-3a=-6$　　$a=2$

よって，一般項は　$a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$

PART4　等比数列の和

例題

(1)　次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(i)　初項 3，公比 2　　(ii)　初項 27，公比 $\dfrac{1}{3}$

(2)　初項 16，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列の第 6 項から第 10 項までの和を求めよ。

(1) (i)　$S_n=\dfrac{3(2^n-1)}{2-1}=3(2^n-1)$

(ii)　$S_n=\dfrac{27\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}\cdot27\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}=\dfrac{81}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

(2)　この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{16\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot16\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=32\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

求める和は $S_{10}-S_5=32\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\right\}-32\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right\}=2^5\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}-1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right\}$

$$=2^5\left(-\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^5}\right)$$

$$=-\frac{1}{2^5}+\frac{2^5}{2^5}$$

$$=-\frac{1}{32}+\frac{32}{32}=\frac{31}{32}$$

(別解)

この数列の一般項を a_n とすると　$a_n=16\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

求める和は，初項 $a_6=16\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$，項数 $10-6+1=5$ の等比数列の和より

$$\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{31}{32}=\frac{31}{32}$$

練習

(1)　次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(i)　初項 1，公比 3　　　(ii)　初項 81，公比 $\frac{1}{4}$

(2)　初項 2，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列の第 3 項から第 6 項までの和を求めよ。

(1)(i)　$S_n=\dfrac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$

(ii)　$S_n=\dfrac{81\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}\cdot81\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=108\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

(2)　この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{2\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}\cdot2\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

求める和は $S_6-S_2=\dfrac{3}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^6\right\}-\dfrac{3}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right\}=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^6}-1+\dfrac{1}{3^2}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1+3^4}{3^5}$$

$$=\frac{40}{3^5}=\frac{40}{243}$$

（別解）

この数列の一般項を a_n とすると　$a_n=2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

求める和は，初項 $a_3=2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}$，公比 $-\dfrac{1}{3}$，項数 $6-3+1=4$ の等比数列の和より

$$\frac{\dfrac{2}{9}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^4\right\}}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{80}{81}=\frac{40}{243}$$

第 2 講　和の記号Σ，階差数列

PART1　和の記号Σ

例題

(1)　次の式を，数列の各項を列挙した和の形で表せ。

(i)　$\sum_{k=1}^{5}(2k-1)$　　(ii)　$\sum_{k=1}^{6}2^k$

(2)　次の式を，和の記号Σを用いて表せ。

(i)　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$　　(ii)　$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+(n-1)\cdot n$

(3)　和 $\sum_{k=1}^{n}2^k$ を求めよ。

(1) (i)　$\sum_{k=1}^{5}(2k-1)=(2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)+(2\cdot3-1)+(2\cdot4-1)+(2\cdot5-1)=1+3+5+7+9$

(ii)　$\sum_{k=1}^{6}2^k=2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=2+4+8+16+32+64$

(2) (i)　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$

(ii)　$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+(n-1)\cdot n=\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)$

(3)　$\sum_{k=1}^{n}2^k=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}=2(2^n-1)$

練習

(1)　次の式を，数列の各項を列挙した和の形で表せ。

(i)　$\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$　　(ii)　$\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}$

(2)　次の式を，和の記号Σを用いて表せ。

(i)　$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$　　(ii)　$1\cdot1+3\cdot2+5\cdot4+\cdots\cdots+(2n+1)\cdot2^n$

(3)　和 $\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^k$ を求めよ。

(1) (i)　$\sum_{k=1}^{4}(3k+1)=(3\cdot1+1)+(3\cdot2+1)+(3\cdot3+1)+(3\cdot4+1)=4+7+10+13$

(ii)　$\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}=3^0+3^1+3^2+3^3+3^4=1+3+9+27+81$

(2) (i)　$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3$

(ii)　$1\cdot1+3\cdot2+5\cdot4+\cdots\cdots+(2n+1)\cdot2^n=\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)\cdot2^{k-1}$

(3)　$\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^k=\dfrac{6(3^n-1)}{3-1}=3(3^n-1)$

PART2　∑の性質

例題

次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2+k-4\right)$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}4k^3$

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n=n^2+4n=n(n+4)$

(別解)

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=5+7+9+\cdots\cdots+(2n+3)=\frac{1}{2}n\{5+(2n+3)\}=\frac{1}{2}n(2n+8)=n(n+4)$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2+k-4\right)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}4$

$$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)-4n$$

$$=\frac{1}{2}n\{(n+1)(2n+1)+(n+1)-8\}$$

$$=\frac{1}{2}n\left(2n^2+4n-6\right)=n\left(n^2+2n-3\right)=n(n+3)(n-1)$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}4k^3=4\sum_{k=1}^{n}k^3=4\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2=n^2(n+1)^2$

練習

次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-1)$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(4k^3+1\right)$

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n=2n^2+n=n(2n+1)$

(別解)

$$\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=3+7+11+\cdots\cdots+(4n-1)=\frac{1}{2}n\{3+(4n-1)\}=\frac{1}{2}n(4n+2)=n(2n+1)$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)=\sum_{k=1}^{n}\left(k^2-6k+5\right)=\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}5$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+5n$$

$$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-18(n+1)+30\}$$

$$=\frac{1}{6}n\left(2n^2-15n+13\right)=\frac{1}{6}n(2n-13)(n-1)$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(4k^3+1\right)=4\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}1$

$$=4\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+n$$

$$=n^2(n+1)^2+n=n\left\{n(n+1)^2+1\right\}=n\left(n^3+2n^2+n+1\right)$$

PART3　∑を用いて和を求める

例題

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　1^2，3^2，5^2，……

(2)　1，1＋2，1＋2＋3，……

(1)　この数列の第 k 項を a_k とすると，$a_k=(2k-1)^2$ であるから，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}\left(4k^2-4k+1\right)$$

$$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}=\frac{1}{3}n\left(4n^2-1\right)=\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$$

(2)　この数列の第 k 項を a_k とすると，a_k は初項 1，公差 1，項数 k の等差数列の和であるから

$$a_k=\frac{k}{2}\{2\cdot1+(k-1)\cdot1\}=\frac{1}{2}k(k+1)$$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{12}n(n+1)(2n+4)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

練習

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　1･1，2･4，3･7，……

(2)　1，1+2，1+2+4，……

(1)　この数列の第 k 項を a_k とすると，$a_k=k(3k-2)$ であるから，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n} k(3k-2)=\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2-2k\right)$$

$$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)-2\}=\frac{1}{2}n(n+1)(2n-1)$$

(2)　この数列の第 k 項を a_k とすると，a_k は初項 1，公比 2，項数 k の等比数列の和であるから

$$a_k=\frac{1\cdot\left(2^k-1\right)}{2-1}=2^k-1$$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(2^k-1\right)=\frac{2\left(2^n-1\right)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$$

PART4　階差数列と一般項

例題

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　1, 4, 8, 13, 19, ……　　(2)　1, 2, 5, 14, 41, ……

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

3, 4, 5, 6, ……

これは，初項 3，公差 1 の等差数列より，$b_n=3+(n-1)\cdot 1=n+2$ と表される。

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)=1+\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)=\frac{1}{2}(n^2+3n-2)$$

この式において，$n=1$ のとき $\frac{1}{2}(1^2+3\cdot 1-2)=1$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は　$a_n=\frac{1}{2}(n^2+3n-2)$

(2)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1, 3, 9, 27, ……

これは，初項 1，公比 3 の等比数列より，$b_n=1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$ と表される。

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=1+\frac{1\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$$

この式において，$n=1$ のとき $\frac{1}{2}(3^0+1)=1$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は　$a_n=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

練習

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　2，6，12，20，30，……　　　　(2)　5，7，11，19，35，……

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

4，6，8，10，……

これは，初項 4，公差 2 の等差数列より，$b_n=4+(n-1)\cdot 2=2n+2$ と表される。

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)=2+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)=n^2+n$$

この式において，$n=1$ のとき $1^2+1=2$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は $a_n=n^2+n=n(n+1)$

(2)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

2，4，8，16，……

これは，初項 2，公比 2 の等比数列より，$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$ と表される。

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=5+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=5+\frac{2\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n+3$$

この式において，$n=1$ のとき $2^1+3=5$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は $a_n=2^n+3$

第 3 講　いろいろな数列の和

PART1　数列の和と一般項

例題

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n=n^2-3n$　　　　(2)　$S_n=3^n+1$

(1)　$a_1=S_1=1^2-3\cdot1=-2$

また，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-3n)-\{(n-1)^2-3(n-1)\}=2n-4$$

この式で，$n=1$ のとき $2\cdot1-4=-2$ となり，a_1 と一致する。よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=2n-4$

(2)　$a_1=S_1=3^1+1=4$

また，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n+1)-(3^{n-1}+1)=3^n-3^{n-1}=3\cdot3^{n-1}-1\cdot3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}$$

この式で，$n=1$ のとき $2\cdot3^0=2$ となり，a_1 と一致しない。よって，この式は $n=1$ のときには成り立たない。

したがって　$a_1=4$，$n\geqq2$ のとき $a_n=2\cdot3^{n-1}$

練習

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n=3n^2-2n+1$　　(2)　$S_n=2^{n+2}-4$

(1)　$a_1=S_1=3\cdot1^2-2\cdot1+1=2$

また，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(3n^2-2n+1\right)-\left\{3(n-1)^2-2(n-1)+1\right\}=6n-5$$

この式で，$n=1$ のとき $6\cdot1-5=1$ となり，a_1 と一致しない。よって，この式は $n=1$ のときには成り立たない。

したがって　$a_1=2$，$n\geqq2$ のとき $a_n=6n-5$

(2)　$a_1=S_1=2^3-4=4$

また，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(2^{n+2}-4\right)-\left(2^{n+1}-4\right)$$
$$=2^{n+2}-2^{n+1}=2\cdot2^{n+1}-1\cdot2^{n+1}=1\cdot2^{n+1}=2^{n+1}$$

この式で，$n=1$ のとき $2^2=4$ となり，a_1 と一致する。よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=2^{n+1}$

PART2　分数で表された数列の和

例題

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot3},\ \frac{1}{3\cdot5},\ \frac{1}{5\cdot7},\ \cdots\cdots$$

この数列の第 n 項は

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

よって，求める和は

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2n+1)-1}{2n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{n}{2n+1}$$

練習

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot 4},\ \frac{1}{4\cdot 7},\ \frac{1}{7\cdot 10},\ \cdots\cdots$$

この数列の第 n 項は

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

よって，求める和は

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3n+1)-1}{3n+1}=\frac{n}{3n+1}$$

PART3　（等差数列）×（等比数列）の和

例題

次の和 S を求めよ。

$$S=1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\cdots\cdots+n\cdot 3^n$$

$$S=1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\cdots\cdots+n\cdot 3^n \qquad \cdots\cdots ①$$

①の両辺に 3 を掛けると

$$3S=\qquad 1\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 3^n+n\cdot 3^{n+1} \quad \cdots\cdots ②$$

①－②より

$$-2S=1\cdot 3+1\cdot 3^2+1\cdot 3^3+\cdots\cdots+1\cdot 3^n-n\cdot 3^{n+1}$$

$$=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\cdot 3^{n+1}$$

$$=\frac{3}{2}(3^n-1)-n\cdot 3^{n+1}=\frac{1}{2}\cdot 3^{n+1}-\frac{3}{2}-n\cdot 3^{n+1}=\frac{1-2n}{2}\cdot 3^{n+1}-\frac{3}{2}$$

よって　$S=\dfrac{2n-1}{4}\cdot 3^{n+1}+\dfrac{3}{4}$

練習

次の和 S を求めよ。

$$S=2\cdot1+4\cdot2+6\cdot2^2+\cdots\cdots+2n\cdot2^{n-1}$$

$$S=2\cdot1+4\cdot2+6\cdot2^2+\cdots\cdots+2n\cdot2^{n-1} \quad \cdots\cdots ①$$

①の両辺に 2 を掛けると

$$2S=\qquad 2\cdot2+4\cdot2^2+\cdots\cdots+(2n-2)\cdot2^{n-1}+2n\cdot2^n \quad \cdots\cdots ②$$

①－②より

$$-S=2\cdot1+2\cdot2+2\cdot2^2+\cdots\cdots+2\cdot2^{n-1}-2n\cdot2^n$$

$$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-2n\cdot2^n$$

$$=2(2^n-1)-2n\cdot2^n=2\cdot2^n-2-2n\cdot2^n=(1-n)\cdot2^{n+1}-2$$

よって　$S=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$

PART4　群数列

例題

偶数の数列 2, 4, 6, 8, …… を，第 n 群が n 個の偶数を含むように分ける。

$$2 \mid 4,\ 6 \mid 8,\ 10,\ 12 \mid 14,\ 16,\ 18,\ 20 \mid 22,\ \cdots\cdots$$

(1)　第 n 群の最後の偶数を求めよ。　(2)　第 n 群の最初の偶数を求めよ。

(3)　第 n 群に含まれる偶数の総和を求めよ。

もとの数列の第 k 項は $2k$

(1)　第 1 群から第 n 群までに含まれる偶数の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

よって，第 n 群の最後の偶数は，もとの数列の第 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 項であるから

$$2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=n(n+1)=n^2+n$$

(2)　$n \geqq 2$ のとき，第 $(n-1)$ 群の最後の偶数は，もとの数列の第 $\frac{1}{2}(n-1)n$ 項

よって，第 n 群の最初の偶数は，もとの数列の第 $\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}$ 項であるから

$$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}=(n-1)n+2=n^2-n+2$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

(3)　第 n 群は，初項 n^2-n+2，末項 n^2+n，項数 n の等差数列であるから，その総和は

$$\frac{1}{2}n\{(n^2-n+2)+(n^2+n)\}=\frac{1}{2}n(2n^2+2)=n(n^2+1)$$

練習

奇数の数列 1，3，5，7，…… を，第 n 群が $2n-1$ 個の奇数を含むように分ける。

1 | 3，5，7 | 9，11，13，15，17 | 19，21，23，25，27，29，31 | 33，……

(1)　第 n 群の最後の奇数を求めよ。　　(2)　第 n 群の最初の奇数を求めよ。

(3)　第 n 群に含まれる奇数の総和を求めよ。

もとの数列の第 k 項は $2k-1$

(1)　第 1 群から第 n 群までに含まれる奇数の個数は

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=\frac{1}{2}n\{1+(2n-1)\}=n^2$$

よって，第 n 群の最後の奇数は，もとの数列の第 n^2 項であるから

$2n^2-1$

(2)　$n \geqq 2$ のとき，第 $(n-1)$ 群の最後の奇数は，もとの数列の第 $(n-1)^2$ 項，

つまり第 n^2-2n+1 項

よって，第 n 群の最初の奇数は，もとの数列の第 $\{(n^2-2n+1)+1\}$ 項，

すなわち第 (n^2-2n+2) 項であるから

$$2(n^2-2n+2)-1=2n^2-4n+3$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

(3)　第 n 群は，初項 $2n^2-4n+3$，末項 $2n^2-1$，項数 $2n-1$ の等差数列であるから，その総和は

$$\frac{2n-1}{2}\{(2n^2-4n+3)+(2n^2-1)\}=\frac{2n-1}{2}(4n^2-4n+2)=(2n-1)(2n^2-2n+1)$$

第 4 講　漸化式と数学的帰納法

PART1　漸化式

例題

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n-2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の第５項を求めよ。

(2)　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(i)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+4$　　(ii)　$a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n$

(1)　$a_2=4a_1-2=4\cdot1-2=2$　　$a_3=4a_2-2=4\cdot2-2=6$

$a_4=4a_3-2=4\cdot6-2=22$

よって　$a_5=4a_4-2=4\cdot22-2=86$

(2)(i)　数列 $\{a_n\}$ は初項２，公差４の等差数列である。

よって　$a_n=2+(n-1)\cdot4=4n-2$

(ii)　数列 $\{a_n\}$ は初項５，公比３の等比数列である。

よって　$a_n=5\cdot3^{n-1}$

練習

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の第 5 項を求めよ。

(2)　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(i)　$a_1=4$，$a_{n+1}=a_n-3$　　(ii)　$a_1=\dfrac{1}{4}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$

(1)　$a_2=2a_1+1=2\cdot2+1=5$　　$a_3=2a_2+2=2\cdot5+2=12$

$a_4=2a_3+3=2\cdot12+3=27$

よって　$a_5=2a_4+4=2\cdot27+4=58$

(2)(i)　数列 $\{a_n\}$ は初項 4，公差 -3 の等差数列である。

よって　$a_n=4+(n-1)\cdot(-3)=-3n+7$

(ii)　数列 $\{a_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。

よって　$a_n=\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

PART2　漸化式と一般項

例題

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+n$

(2)　$a_1=6$，$a_{n+1}=4a_n-9$

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n=n$ である。

よって，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}k=1+\frac{1}{2}(n-1)n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1$

$a_1=1$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1$

(2)　$a_{n+1}=4a_n-9$ を変形すると，$a_{n+1}-3=4(a_n-3)$

よって，数列 $\{a_n-3\}$ は，初項 $a_1-3=6-3=3$，公比 4 の等比数列である。

したがって，$a_n-3=3\cdot 4^{n-1}$ より，求める一般項は　$a_n=3\cdot 4^{n-1}+3$

練習

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+4^n$

(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4$

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n=4^n$ である。

よって，$n \geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=3+\sum_{k=1}^{n-1} 4^k=3+\dfrac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}=\dfrac{4^n+5}{3}$

$a_1=3$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\dfrac{4^n+5}{3}$

(2)　$a_{n+1}=3a_n+4$ を変形すると，$a_{n+1}+2=3(a_n+2)$

よって，数列 $\{a_n+2\}$ は，初項 $a_1+2=1+2=3$，公比 3 の等比数列である。

したがって，$a_n+2=3 \cdot 3^{n-1}=3^n$ より，求める一般項は　$a_n=3^n-2$

PART3　数学的帰納法

例題

n を自然数とするとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ。

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ …… ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　①の左辺 $=1^3=1$，　①の右辺 $=\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2=1$

よって，$n=1$ のとき，①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$$

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}①の左辺&=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3\\&=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3\\&=\frac{1}{4}(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2=\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときの①の右辺と一致する。

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，①が成り立つ。

練習

n を自然数とするとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ。

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ …… ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　①の左辺 $=1\cdot2=2$，　①の右辺 $=\dfrac{1}{3}\cdot1\cdot2\cdot3=2$

よって，$n=1$ のとき，①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

$n=k+1$ のとき

①の左辺 $=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$

$=\dfrac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)=\dfrac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

となり，$n=k+1$ のときの①の右辺と一致する。

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，①が成り立つ。

PART4　数学的帰納法による様々な証明

例題

(1)　n を 2 以上の自然数とするとき，数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$$

(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(i)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(ii)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，それを数学的帰納法によって証明せよ。

(1)　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}>\dfrac{2n}{n+1}$ …… ① とする。

[1]　$n=2$ のとき　　(①の左辺)$=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，　(①の右辺)$=\dfrac{2\cdot 2}{2+1}=\dfrac{4}{3}$

よって，$n=2$ のとき，①は成り立つ。

[2]　$k\geqq 2$ として，$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$$

$n=k+1$ のとき

(①の左辺)$-$(①の右辺)

$$\begin{aligned}
&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}\\
&=\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}\\
&=\frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}\\
&=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0
\end{aligned}$$

よって，$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}>\dfrac{2(k+1)}{k+2}$ となり，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2]より，2 以上のすべての自然数 n について，①が成り立つ。

(2)(i)　$a_2=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，$a_3=2-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$，$a_4=2-\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{4}$

(ii)　(i)より，一般項は $a_n=\dfrac{n+1}{n}$ …… ① と推測される。これが正しいことを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき，$a_1=2$ となり，①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$a_k=\frac{k+1}{k}$$

$n=k+1$ のとき，与えられた漸化式より

$$a_{k+1}=2-\frac{1}{a_k}=2-\frac{k}{k+1}=\frac{2(k+1)-k}{k+1}=\frac{k+2}{k+1}$$

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，①が成り立つ。

したがって，求める一般項は $a_n=\dfrac{n+1}{n}$

練習

(1)　n を4以上の自然数とするとき，数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ。

$$2^n > 3n+1$$

(2)　$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n{}^2-1}{n+1}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(i)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(ii)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，それを数学的帰納法によって証明せよ。

(1)　$2^n > 3n+1$ …… ① とする。

[1]　$n=4$ のとき　　(①の左辺)$=2^4=16$，　(①の右辺)$=3\cdot4+1=13$

よって，$n=4$ のとき，①は成り立つ。

[2]　$k \geqq 4$ として，$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$2^k > 3k+1$$

$n=k+1$ のとき

(①の左辺)－(①の右辺)

$$=2^{k+1}-\{3(k+1)+1\}=2\cdot2^k-(3k+4)>2\cdot(3k+1)-(3k+4)$$
$$=3k-2>0 \quad (k \geqq 4 \text{ より})$$

よって，$2^{k+1}>3(k+1)+1$ となり，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2]より，4以上のすべての自然数 n について，①が成り立つ。

(2)(i)　$a_2=\dfrac{3^2-1}{1+1}=4$，$a_3=\dfrac{4^2-1}{2+1}=5$，$a_4=\dfrac{5^2-1}{3+1}=6$

(ii)　(i)より，一般項は $a_n=n+2$ …… ① と推測される。これが正しいことを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき，$a_1=3$ となり，①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると $a_k=k+2$

$n=k+1$ のとき，与えられた漸化式より

$$a_{k+1}=\frac{a_k{}^2-1}{k+1}=\frac{(k+2)^2-1}{k+1}=\frac{k^2+4k+3}{k+1}=\frac{(k+1)(k+3)}{k+1}=k+3$$

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，①が成り立つ。

したがって，求める一般項は $a_n=n+2$

第5講　確率分布

PART1　確率変数と確率分布

例題

赤球5個，白球3個が入った袋から，3個の球を同時に取り出すとき，出る赤球の個数を X とする。

(1)　X の確率分布を求めよ。

(2)　$P(X \leqq 1)$ を求めよ。

(1)　確率変数 X のとりうる値は 0，1，2，3

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_3}{{}_8C_3}=\frac{1}{56},\quad P(X=1)=\frac{{}_5C_1\times{}_3C_2}{{}_8C_3}=\frac{15}{56}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_5C_2\times{}_3C_1}{{}_8C_3}=\frac{30}{56},\quad P(X=3)=\frac{{}_5C_3}{{}_8C_3}=\frac{10}{56}$$

よって，X の確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$	1

(2)　$P(X \leqq 1)=P(X=0)+P(X=1)=\dfrac{1}{56}+\dfrac{15}{56}=\dfrac{16}{56}=\dfrac{2}{7}$

練習

2 個のさいころを同時に投げて，出る目の最小値を X とする。

(1)　X の確率分布を求めよ。

(2)　$P(2 \leqq X \leqq 5)$ を求めよ。

(1)　2 個のさいころの出る目を a，b とすると，
a と b の最小値は右の表のようになる。
よって，確率変数 X のとりうる値は

1，2，3，4，5，6

したがって，X の確率分布は下の表のようになる。

b \ a	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

(2)　$P(2 \leqq X \leqq 5) = P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$$= \frac{9}{36}+\frac{7}{36}+\frac{5}{36}+\frac{3}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

PART2　確率変数の期待値

例題

6 枚のカード [1], [1], [1], [2], [2], [3] から無作為に 1 枚取り出したとき，そのカードに書かれている数を X とする。確率変数 X の期待値を求めよ。

X の確率分布は下の表のようになる。

X	1	2	3	計
P	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって，X の期待値は

$$E(X)=1\cdot\frac{3}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}(1\cdot3+2\cdot2+3\cdot1)=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

練習

5 枚の硬貨を同時に投げて，表が出る枚数を X とするとき，確率変数 X の期待値を求めよ。

X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

よって，X の期待値は

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{32}+1\cdot\frac{5}{32}+2\cdot\frac{10}{32}+3\cdot\frac{10}{32}+4\cdot\frac{5}{32}+5\cdot\frac{1}{32}$$

$$=\frac{1}{32}(0\cdot1+1\cdot5+2\cdot10+3\cdot10+4\cdot5+5\cdot1)=\frac{80}{32}=\frac{5}{2}$$

PART3　確率変数の分散と標準偏差

例題

1 ~ 9 までの数字が書かれた 9 枚のカードから無作為に 1 枚取り出し，そのカードに書かれている数を X とする。X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

確率変数 X の確率分布は下の表のようになる。

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	計
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

X の期待値は

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{9}+4\cdot\frac{1}{9}+5\cdot\frac{1}{9}+6\cdot\frac{1}{9}+7\cdot\frac{1}{9}+8\cdot\frac{1}{9}+9\cdot\frac{1}{9}=5$$

X の分散は

$$V(X)=(1-5)^2\cdot\frac{1}{9}+(2-5)^2\cdot\frac{1}{9}+(3-5)^2\cdot\frac{1}{9}+(4-5)^2\cdot\frac{1}{9}+(5-5)^2\cdot\frac{1}{9}$$
$$+(6-5)^2\cdot\frac{1}{9}+(7-5)^2\cdot\frac{1}{9}+(8-5)^2\cdot\frac{1}{9}+(9-5)^2\cdot\frac{1}{9}$$
$$=\frac{60}{9}=\frac{20}{3}$$

X の標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{60}{9}}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$$

（分散の別解）

$$E\left(X^2\right)=1^2\cdot\frac{1}{9}+2^2\cdot\frac{1}{9}+3^2\cdot\frac{1}{9}+4^2\cdot\frac{1}{9}+5^2\cdot\frac{1}{9}+6^2\cdot\frac{1}{9}+7^2\cdot\frac{1}{9}+8^2\cdot\frac{1}{9}+9^2\cdot\frac{1}{9}$$
$$=\frac{285}{9}=\frac{95}{3}$$

よって　$V(X)=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2=\frac{95}{3}-5^2=\frac{20}{3}$

練習

当たりくじ３本を含む10本のくじがある。このくじを１本ずつ２回引いたときの当たりくじの本数を X とする。引いたくじは元にもどさないとして，X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

確率変数 X のとりうる値は０，１，２

$$P(X=0)=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{42}{90}$$

$$P(X=1)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{42}{90}$$

$$P(X=2)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{6}{90}$$

よって，X の確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{42}{90}$	$\frac{42}{90}$	$\frac{6}{90}$	1

X の期待値は

$$E(X)=0\cdot\frac{42}{90}+1\cdot\frac{42}{90}+2\cdot\frac{6}{90}=\frac{54}{90}=\frac{3}{5}$$

X の分散は

$$V(X)=\left(0-\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{42}{90}+\left(1-\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{42}{90}+\left(2-\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{6}{90}=\frac{840}{25\cdot90}=\frac{28}{75}$$

X の標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{28}{75}}=\frac{2\sqrt{21}}{15}$$

（分散の別解）

$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{42}{90}+1^2\cdot\frac{42}{90}+2^2\cdot\frac{6}{90}=\frac{66}{90}=\frac{11}{15}$$

よって $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{11}{15}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{28}{75}$

PART4　確率変数の変換

例題

確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき，次の確率変数の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

(1)　$5X-1$　　(2)　$-X$

X	0	1	2	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$$E(X)=0\cdot\frac{3}{10}+1\cdot\frac{6}{10}+2\cdot\frac{1}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

$$V(X)=\left(0^2\cdot\frac{3}{10}+1^2\cdot\frac{6}{10}+2^2\cdot\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{4}{5}\right)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$$

(1)　$E(5X-1)=5E(X)-1=5\cdot\frac{4}{5}-1=3$

$V(5X-1)=5^2\,V(X)=25\cdot\frac{9}{25}=9$

$\sigma(5X-1)=|5|\sigma(X)=5\cdot\frac{3}{5}=3$　　　※$\sigma(5X-1)=\sqrt{V(5X-1)}=\sqrt{9}=3$

(2)　$E(-X)=-E(X)=-\frac{4}{5}$

$V(-X)=(-1)^2\,V(X)=1\cdot\frac{9}{25}=\frac{9}{25}$

$\sigma(-X)=|-1|\sigma(X)=1\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$　　　※$\sigma(-X)=\sqrt{V(-X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

練習

確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき，次の確率変数の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

(1)　$10X+2$　　(2)　$-5X-3$

X	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{35}{70}$	$\frac{20}{70}$	$\frac{10}{70}$	$\frac{4}{70}$	$\frac{1}{70}$	1

$$E(X)=1\cdot\frac{35}{70}+2\cdot\frac{20}{70}+3\cdot\frac{10}{70}+4\cdot\frac{4}{70}+5\cdot\frac{1}{70}=\frac{126}{70}=\frac{9}{5}$$

$$V(X)=\left(1^2\cdot\frac{35}{70}+2^2\cdot\frac{20}{70}+3^2\cdot\frac{10}{70}+4^2\cdot\frac{4}{70}+5^2\cdot\frac{1}{70}\right)-\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{105}{25}-\frac{81}{25}=\frac{24}{25}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

(1)　$E(10X+2)=10E(X)+2=10\cdot\frac{9}{5}+2=20$

$$V(10X+2)=10^2\,V(X)=100\cdot\frac{24}{25}=96$$

$$\sigma(10X+2)=|10|\sigma(X)=10\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=4\sqrt{6}$$

※$\sigma(10X+2)=\sqrt{V(10X+2)}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

(2)　$E(-5X-3)=-5E(X)-3=-5\cdot\frac{9}{5}-3=-12$

$$V(-5X-3)=(-5)^2\,V(X)=25\cdot\frac{24}{25}=24$$

$$\sigma(-5X-3)=|-5|\sigma(X)=5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=2\sqrt{6}$$

※$\sigma(-5X-3)=\sqrt{V(-5X-3)}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

第6講　確率変数の和と積，二項分布

PART1　同時分布，確率変数の和の期待値

例題

100円硬貨2枚と10円硬貨3枚を同時に投げる。

(1)　表が出た硬貨の枚数の期待値を求めよ。

(2)　表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

表が出た100円硬貨，10円硬貨の枚数をそれぞれ X 枚，Y 枚とすると，確率変数 X，Y の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Y	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{2}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=1,\qquad E(Y)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

(1)　表が出た硬貨の枚数の期待値は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

(2)　表が出た硬貨の金額の和の期待値は

$$E(100X+10Y)=100E(X)+10E(Y)=100\cdot1+10\cdot\frac{3}{2}=115$$

練習

1個のさいころを3回投げる。

(1)　出る目の和の期待値を求めよ。

(2)　1回目は出た目を，2回目は出た目を3倍したものを，3回目は出た目を10倍したものをそれぞれ点数として得られるとき，合計点数の期待値を求めよ。

1回目，2回目，3回目の出る目をそれぞれ X，Y，Z とすると，確率変数 X，Y，Z の確率分布はいずれも下の表のようになる。

出る目	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X)=E(Y)=E(Z)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

(1)　$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=\frac{21}{2}$

(2)　$E(X+3Y+10Z)=E(X)+3E(Y)+10E(Z)=\frac{7}{2}+3\cdot\frac{7}{2}+10\cdot\frac{7}{2}=49$

PART2　独立な確率変数

例題

1 個のさいころを 2 回投げ，1 回目，2 回目に出る目をそれぞれ X，Y とする。

(1)　XY の期待値を求めよ。

(2)　$X+Y$ の分散を求めよ。

(3)　$X+2Y$ の分散を求めよ。

確率変数 X，Y の確率分布はいずれも下の表のようになる。

出る目	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(1)　$E(X)=E(Y)=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

X，Y は独立であるから，XY の期待値は

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2}=\frac{49}{4}$$

(2)　$V(X)=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2=\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right)\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$

$V(Y)=\frac{35}{12}$

X，Y は独立であるから，$X+Y$ の分散は

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{35}{12}+\frac{35}{12}=\frac{35}{6}$$

(3)　X，Y は独立であるから，$X+2Y$ の分散は

$$V(X+2Y)=V(X)+2^2\,V(Y)=\frac{35}{12}+4\cdot\frac{35}{12}=\frac{175}{12}$$

練習

3 枚の硬貨を投げ，表の出た枚数を X とする。また，1 個のさいころを投げ，出た目が 4 以上のとき $Y=4$，それ以外の目が出たとき，その目を Y とする。

(1)　XY の期待値を求めよ。

(2)　$X+Y$ の分散を求めよ。

(3)　$2X+3Y$ の分散を求めよ。

確率変数 X，Y の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Y	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

(1)　$E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

$E(Y)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{3}{6}=3$

X，Y は独立であるから，XY の期待値は

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{3}{2}\cdot3=\frac{9}{2}$$

(2)　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\left(0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^2=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=\left(1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{3}{6}\right)-3^2=\frac{31}{3}-9=\frac{4}{3}$

X，Y は独立であるから，$X+Y$ の分散は

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{3}{4}+\frac{4}{3}=\frac{25}{12}$$

(3)　X，Y は独立であるから，$2X+3Y$ の分散は

$$V(2X+3Y)=2^2\,V(X)+3^2\,V(Y)=4\cdot\frac{3}{4}+9\cdot\frac{4}{3}=15$$

PART3　二項分布

例題

2 枚の硬貨を同時に 5 回投げるとき，2 枚とも表が出る回数を X とする。

(1)　X はどのような二項分布に従うか。$B(n,\ p)$ の形で答えよ。

(2)　2 枚とも表が出る回数が 3 回以上である確率を求めよ。

(1)　1 回の試行で 2 枚とも表が出る確率は $\dfrac{1}{4}$

この試行を 5 回繰り返すから，X は二項分布 $B\left(5,\ \dfrac{1}{4}\right)$ に従う。

(2)　$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_5\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{5-r}\quad(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P(X\geqq 3)&=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)\\&={}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0\\&=\frac{90}{1024}+\frac{15}{1024}+\frac{1}{1024}=\frac{53}{512}\end{aligned}$$

練習

1個のさいころを4回投げるとき，6の目が出る回数を X とする。

(1) X はどのような二項分布に従うか。$B(n,\ p)$ の形で答えよ。

(2) 6の目が出る回数が2回以下である確率を求めよ。

(1) 1回の試行で6の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$

この試行を4回繰り返すから，X は二項分布 $B\left(4,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従う。

(2) $X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_4\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{4-r}\quad(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P(X\leqq 2)&=1-\{P(X=3)+P(X=4)\}\\&=1-\left\{{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1+{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0\right\}\\&=1-\left(\frac{20}{1296}+\frac{1}{1296}\right)=1-\frac{7}{432}=\frac{425}{432}\end{aligned}$$

PART4　二項分布の期待値，分散，標準偏差

例題

5 つの選択肢から 1 つを選ぶ選択式の問題が全部で 100 問ある。各問題においては正解が 1 つだけ存在する。この問題すべてに無作為に解答したときの正解数を X とする。

(1)　X の期待値を求めよ。

(2)　X の分散を求めよ。

(3)　X の標準偏差を求めよ。

X は二項分布 $B\left(100,\ \dfrac{1}{5}\right)$ に従う。

(1)　$E(X)=100\cdot\dfrac{1}{5}=20$

(2)　$V(X)=100\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\left(1-\dfrac{1}{5}\right)=16$

(3)　$\sigma(X)=\sqrt{16}=4$

練習

赤球２個, 白球３個が入った袋から, ２個の球を同時に取り出し, 色を確認してから袋に戻す。この試行を５回繰り返すとき，２個とも赤球である回数を X とする。

(1)　X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

(2)　各試行において，２個とも赤球が出れば 100 円を受け取ることができ，それ以外のときはお金を受け取れないとする。５回終了後に，受け取ることができる金額の期待値，分散を求めよ。

X は二項分布 $B\left(5,\ \dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\right)$，すなわち $B\left(5,\ \dfrac{1}{10}\right)$ に従う。

(1)　$E(X)=5\cdot\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{2}$，$V(X)=5\cdot\dfrac{1}{10}\cdot\left(1-\dfrac{1}{10}\right)=\dfrac{9}{20}$，$\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{9}{20}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

(2)　受け取る金額の期待値は $E(100X)=100E(X)=100\cdot\dfrac{1}{2}=50$

受け取る金額の分散は $V(100X)=100^2\,V(X)=10000\cdot\dfrac{9}{20}=4500$

第７講　正規分布

PART1　連続分布

例題

確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=2x\,(0\leqq x\leqq 1)$ で与えられているとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P\left(\dfrac{1}{4}\leqq X\leqq \dfrac{3}{4}\right)$　　(2)　$P(0\leqq X\leqq 1)$

(1)　$P\left(\dfrac{1}{4}\leqq X\leqq \dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

(2)　$P(0\leqq X\leqq 1)=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$

練習

確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=\frac{8}{9}x\ \left(0\leqq x\leqq\frac{3}{2}\right)$ で与えられているとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P(0\leqq X\leqq 1)$　　(2)　$P\left(\frac{1}{2}\leqq X\leqq\frac{3}{2}\right)$

(1)　$P(0\leqq X\leqq 1)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{8}{9}=\frac{4}{9}$

(2)　$P\left(\frac{1}{2}\leqq X\leqq\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{3}\right)\cdot 1=\frac{8}{9}$

PART2　正規分布

例題

確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P(0 \leqq Z \leqq 1.53)$　(2)　$P(-1.42 \leqq Z \leqq -1)$　(3)　$P(Z \geqq 2.3)$

(1)　$P(0 \leqq Z \leqq 1.53) = p(1.53) = 0.4370$

(2)　$P(-1.42 \leqq Z \leqq -1) = P(1 \leqq Z \leqq 1.42)$

$$= P(0 \leqq Z \leqq 1.42) - P(0 \leqq Z \leqq 1)$$

$$= p(1.42) - p(1)$$

$$= 0.4222 - 0.3413$$

$$= 0.0809$$

(3)　$P(Z \geqq 2.3) = P(Z \geqq 0) - P(0 \leqq Z \leqq 2.3)$

$$= 0.5 - p(2.3)$$

$$= 0.5 - 0.4893$$

$$= 0.0107$$

練習

確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P(0.26 \leqq Z \leqq 1.37)$　　　(2)　$P(Z \leqq -2)$

(1)　$P(0.26 \leqq Z \leqq 1.37) = P(0 \leqq Z \leqq 1.37) - P(0 \leqq Z \leqq 0.26)$

$= p(1.37) - p(0.26)$

$= 0.4147 - 0.1026$

$= 0.3121$

(2)　$P(Z \leqq -2) = P(Z \geqq 2)$

$= P(Z \geqq 0) - P(0 \leqq Z \leqq 2)$

$= 0.5 - p(2)$

$= 0.5 - 0.4772$

$= 0.0228$

PART3　確率変数の標準化

例題

ある高校の高校 2 年生の身長が，平均 170.0 cm，標準偏差 6 cm の正規分布に従うものとする。

(1)　身長 164 cm 以上 179 cm 以下の生徒は約何 % いるか。

(2)　身長が高い方から 12.3% の中に入るのは，何cm以上の生徒か。小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

身長を Xcm とすると，X は正規分布 $N(170,\ 6^2)$ に従う。

$Z=\dfrac{X-170}{6}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

(1)　$X=164$ のとき $Z=-1$　　　$X=179$ のとき　$Z=1.5$

よって　$P(164\leqq X\leqq 179)$

$=P(-1\leqq Z\leqq 1.5)=p(1)+p(1.5)$

$=0.3413+0.4332=0.7745$

したがって，約 77% いる。

(2)　$P(Z\geqq u)=0.123$ となる u を求める。

$P(Z\geqq u)=0.5-p(u)$ より　$0.5-p(u)=0.123$　よって　$p(u)=0.377$

正規分布表より $u=1.16$

よって　$Z\geqq 1.16$ より $\dfrac{X-170}{6}\geqq 1.16$　　　$X\geqq 176.96$

したがって，177.0 cm 以上の生徒

練習

ある高校の高校２年生に数学のテストを行ったところ，平均 48 点，標準偏差 15 点であった。このテストの得点が正規分布に従うとして，次の問いに答えよ。

(1)　81 点以上の生徒は約何 % いるか。小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

(2)　得点が高い方から 33% に入るのは，何点以上の生徒か。

得点を X 点とすると，X は正規分布 $N\left(48,\ 15^2\right)$ に従う。

$Z=\dfrac{X-48}{15}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

(1)　$X=81$ のとき $Z=2.2$

よって　$P(X \geqq 81)$

$=P(Z \geqq 2.2)=0.5-p(2.2)$

$=0.5-0.4861=0.0139$

したがって，約 1.4% いる。

(2)　$P(Z \geqq u)=0.33$ となる u を求める。

$P(Z \geqq u)=0.5-p(u)$ より　$0.5-p(u)=0.33$　よって　$p(u)=0.17$

正規分布表より $u=0.44$

よって　$Z \geqq 0.44$ より $\dfrac{X-48}{15} \geqq 0.44$　　　$X \geqq 54.6$

したがって，55 点以上の生徒。

PART4　二項分布の正規分布による近似

例題

(1)　1 個のさいころを 180 回投げるとき，1 の目が出る回数が 36 回以上である確率を求めよ。

(2)　ある植物の種の発芽率は 60% である。この種を 600 粒まくとき，k 粒以上の種が発芽する確率が 75% 以上になるような k の最大値を求めよ。

(1)　1 の目が出る回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(180,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従うから

$$E(X)=180\cdot\frac{1}{6}=30,\quad V(X)=180\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=25,\quad \sigma(X)=\sqrt{25}=5$$

$n=180$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(30,\ 5^2)$ に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\dfrac{X-30}{5}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うので，求める確率は

$$P(X\geqq 36)=P(Z\geqq 1.2)=0.5-p(1.2)=0.5-0.3849=0.1151$$

(2)　発芽する種の個数を X とすると，X は二項分布 $B\left(600,\ \dfrac{3}{5}\right)$ に従うから

$$E(X)=600\cdot\frac{3}{5}=360,\quad V(X)=600\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=144,\quad \sigma(X)=\sqrt{144}=12$$

$n=600$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(360,\ 12^2)$ に従うとみなしてよい。

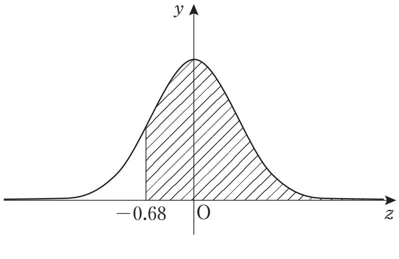
ここで，$Z=\dfrac{X-360}{12}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$P(X\geqq k)\geqq 0.75$ とすると　$P\left(Z\geqq\dfrac{k-360}{12}\right)\geqq 0.5+0.25$

よって　$p\left(-\dfrac{k-360}{12}\right)\geqq 0.25$

$p(0.67)=0.2486$，$p(0.68)=0.2517$ より

$$-\frac{k-360}{12}\geqq 0.68 \qquad k\leqq 351.84$$



よって，求める k の最大値は 351

練習

(1)　ある製品が不良品である確率は 0.02 であるとする。この製品 2500 個中の不良品の個数が 36 個以下である確率を求めよ。

(2)　2 択問題 100 問を出題し，k 問以上正解した人を合格とする。考えることなくでたらめに選んだときの合格率が 2% 以下になるような k の最小値を求めよ。

(1)　不良品の個数を X とすると，X は二項分布 $B(2500,\ 0.02)$ に従うから

$$E(X)=2500\cdot 0.02=50,\quad V(X)=2500\cdot 0.02\cdot 0.98=49,\quad \sigma(X)=\sqrt{49}=7$$

$n=2500$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(50,\ 7^2)$ に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\dfrac{X-50}{7}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うので，求める確率は

$$P(X\leqq 36)=P(Z\leqq -2)=0.5-p(2)=0.5-0.4772=0.0228$$

(2)　正解した問題の数を X とすると，X は二項分布 $B\left(100,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従うから

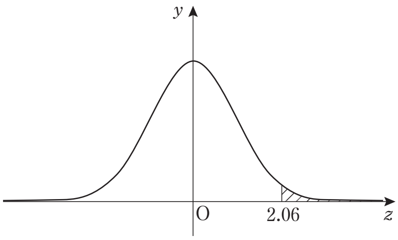
$$E(X)=100\cdot\frac{1}{2}=50,\quad V(X)=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=25,\quad \sigma(X)=\sqrt{25}=5$$

$n=100$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(50,\ 5^2)$ に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\dfrac{X-50}{5}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$P(X\geqq k)\leqq 0.02$ とすると　　$0.5-p\left(\dfrac{k-50}{5}\right)\leqq 0.02$

よって $p\left(\dfrac{k-50}{5}\right)\geqq 0.48$



$p(2.05)=0.4798$，$p(2.06)=0.4803$ より

$$\frac{k-50}{5}\geqq 2.06 \qquad k\geqq 60.3$$

よって，求める k の最小値は 61

第 8 講　統計的な推測

PART1　母集団と標本，標本平均

例題

1，2，3，4 と書かれたカードがそれぞれ 4 枚，3 枚，2 枚，1 枚ある。この 10 枚のカードを母集団とし，カードに書かれた数字を変量とする。

(1)　母集団分布を求めよ。

(2)　母平均，母標準偏差を求めよ。

(3)　この母集団から大きさ 4 の標本を無作為抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とするとき，$\overline{X}$ の期待値，標準偏差を求めよ。

母集団から 1 つのカードを抽出し，そのカードに書かれた数字を X とする。

(1)　母集団分布は右の表

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

(2)　母平均 m と母標準偏差 σ は

$$m=1\cdot\frac{4}{10}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{2}{10}+4\cdot\frac{1}{10}=\frac{20}{10}=2$$

$$\sigma=\sqrt{\left(1^2\cdot\frac{4}{10}+2^2\cdot\frac{3}{10}+3^2\cdot\frac{2}{10}+4^2\cdot\frac{1}{10}\right)-2^2}=\sqrt{\frac{50}{10}-4}=1$$

(3)　$\overline{X}$ の期待値は $E(\overline{X})=m=2$，標準偏差は $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$

練習

右の表は，20 個の球に書かれた数字とその個数である。この 20 個の球を母集団とし，球に書かれた数字を変量とする。

数字	1	2	3	4	5	計
個数	2	4	8	4	2	20

(1)　母平均，母標準偏差を求めよ。

(2)　この母集団から大きさ 16 の標本を無作為抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とするとき，$\overline{X}$ の期待値，標準偏差を求めよ。

母集団から 1 個の球を抽出し，その球に書かれた数字を X とする。母集団分布は右の表

X	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

(1)　母平均 m と母標準偏差 σ は

$$m=1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{2}{10}+3\cdot\frac{4}{10}+4\cdot\frac{2}{10}+5\cdot\frac{1}{10}$$

$$=\frac{30}{10}=3$$

$$\sigma=\sqrt{\left(1^2\cdot\frac{1}{10}+2^2\cdot\frac{2}{10}+3^2\cdot\frac{4}{10}+4^2\cdot\frac{2}{10}+5^2\cdot\frac{1}{10}\right)-3^2}=\sqrt{\frac{102}{10}-9}=\frac{\sqrt{30}}{5}$$

(2)　$\overline{X}$ の期待値は $E(\overline{X})=m=3$，標準偏差は $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{30}}{20}$

PART2　標本平均の分布，標本比率の分布

例題

(1)　母平均 50，母標準偏差 20 の母集団から，大きさ 100 の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ が 52 以上となる確率を求めよ。

(2)　6 個中 1 個の割合で不良品である製品の山から，500 個の製品を無作為抽出するとき，92 個以上が不良品である確率を求めよ。

(1)　$\overline{X}$ の分布は近似的に正規分布 $N\left(50,\ \dfrac{20^2}{100}\right)$，すなわち $N(50,\ 2^2)$ に従う。

$Z=\dfrac{\overline{X}-50}{2}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，$P(\overline{X}\geqq 52)=P(Z\geqq 1)=0.5-p(1)=0.5-0.3413=0.1587$

(2)　母比率は $p=\dfrac{1}{6}$，標本の大きさは $n=500$

よって，標本比率 R の分布は近似的に正規分布 $N\left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{500}\right)$，すなわち

$N\left(\dfrac{1}{6},\ \left(\dfrac{1}{60}\right)^2\right)$ に従う。

$Z=\dfrac{R-\frac{1}{6}}{\frac{1}{60}}=60R-10$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，$P\left(R\geqq\dfrac{92}{500}\right)=P\left(Z\geqq\dfrac{26}{25}\right)=P(Z\geqq 1.04)$

$$=0.5-p(1.04)=0.5-0.3508=0.1492$$

練習

(1)　母平均 165，母標準偏差 4 の母集団から，大きさ 64 の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ が 164 以上 166 以下となる確率を求めよ。

(2)　ある市の市民の血液型は 1 割が AB 型である。この市のある献血ルームに来た市民 900 人のうち 100 人以上が AB 型である確率を求めよ。

(1)　$\overline{X}$ の分布は近似的に正規分布 $N\left(165,\ \dfrac{4^2}{64}\right)$，すなわち $N\left(165,\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)$ に従う。

$Z=\dfrac{\overline{X}-165}{\frac{1}{2}}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって　$P(164\leqq\overline{X}\leqq 166)$

$=P(-2\leqq Z\leqq 2)$

$=2p(2)$

$=2\times 0.4772=0.9544$

(2)　母比率は $p=\dfrac{1}{10}=0.1$，標本の大きさは $n=900$

よって，標本比率 R の分布は近似的に正規分布 $N\left(0.1,\ \dfrac{0.1\cdot 0.9}{900}\right)$，すなわち

$N(0.1,\ 0.01^2)$ に従う。

$Z=\dfrac{R-0.1}{0.01}=100R-10$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって $P\left(R\geqq\dfrac{100}{900}\right)=P\left(Z\geqq\dfrac{10}{9}\right)\fallingdotseq P(Z\geqq 1.11)$

$=0.5-p(1.11)=0.5-0.3665=0.1335$

PART3　母集団の推定

例題

(1)　ある県の 17 歳男子から 100 人を無作為抽出して身長を調べたところ，平均値が 170.2 cm，標準偏差 6.0 cm であった。この県の 17 歳男子の平均身長 m を，信頼度 95% で推定せよ。

(2)　ある工場で製造しているある製品から 2500 個を無作為抽出して調べたところ，50 個の不良品が含まれていた。この工場で製造しているこの製品の不良品率 p を信頼度 95% で推定せよ。

(1)　標本平均は $\overline{X}=170.2$，標本の標準偏差は $s=6.0$，標本の大きさは $n=100$ より

$$1.96\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=1.96\cdot\frac{6.0}{\sqrt{100}}=1.176$$

よって，信頼度 95% の信頼区間は

$$170.2-1.176\leqq m\leqq 170.2+1.176 \qquad 169.024\leqq m\leqq 171.376$$

したがって，169.0 cm 以上 171.4 cm 以下

(2)　標本の大きさは $n=2500$，標本比率は $R=\dfrac{50}{2500}=0.02$ より

$$1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=1.96\cdot\sqrt{\frac{0.02\times0.98}{2500}}=0.005488\fallingdotseq 0.005$$

よって，信頼度 95% の信頼区間は

$$0.02-0.005\leqq p\leqq 0.02+0.005 \quad \text{より} \quad 0.015\leqq p\leqq 0.025$$

練習

(1)　ある牛乳 400 本を無作為抽出して乳脂肪分を測定したところ，平均値が 3.6%，標準偏差 0.45% であった。この牛乳の乳脂肪分の平均値 m を信頼度 95% で推定せよ。

(2)　ある高校の 1 年生から 100 人を無作為抽出して調べたところ，自転車通学者は 36 人であった。この高校の 1 年生全体における自転車通学者の割合 p を信頼度 95% で推定せよ。

(1)　標本平均は $\overline{X}=0.036$，標本の標準偏差は $s=0.0045$，標本の大きさは $n=400$ より

$$1.96\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=1.96\cdot\frac{0.0045}{\sqrt{400}}=0.000441$$

よって，信頼度 95% の信頼区間は

$$0.036-0.000441\leqq m\leqq 0.036+0.000441 \qquad 0.035559\leqq m\leqq 0.036441$$

したがって，3.56% 以上 3.64% 以下

(2)　標本の大きさは $n=100$，標本比率は $R=\dfrac{36}{100}=0.36$ より

$$1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=1.96\cdot\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{100}}=0.09408\fallingdotseq 0.094$$

よって，信頼度 95% の信頼区間は

$$0.36-0.094\leqq p\leqq 0.36+0.094 \quad より \quad 0.266\leqq p\leqq 0.454$$

PART4　仮説検定

例題

ある硬貨を 400 回投げたところ，表が 217 回出た。有意水準を 5% として，次のことがいえると判断してよいかをそれぞれ検定せよ。

(1)　この硬貨は表が出やすい。

(2)　この硬貨は表と裏の出方に偏りがある。

(1)　対立仮説 H_1 は「この硬貨は表が出やすい」

帰無仮説 H_0 は「この硬貨は表と裏の出方に偏りがない」

H_0 が正しいとするとき，この硬貨を投げて表が出る回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(400,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う。X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=400\cdot\frac{1}{2}=200,\quad \sigma=\sqrt{400\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=10$$

$n=400$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(200,\ 10^2)$ に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\dfrac{X-200}{10}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表より $P(0\leqq Z\leqq 1.64)\fallingdotseq 0.45$ であるから，有意水準 5% の棄却域は

$$Z\geqq 1.64$$

$X=217$ のとき，$Z=1.7$ であるから，この値は棄却域に入る。

よって，帰無仮説 H_0 は棄却できる。

したがって，この硬貨は表が出やすいと判断できる。

(2)　対立仮説 H_1 は「この硬貨は表と裏の出方に偏りがある」

帰無仮説 H_0 は「この硬貨は表と裏の出方に偏りがない」

H_0 が正しいとするとき，この硬貨を投げて表が出る回数を X とし，$Z=\dfrac{X-200}{10}$ とおくと

(1)より，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表より $P(-1.96\leqq Z\leqq 1.96)\fallingdotseq 0.95$ であるから，有意水準 5% の棄却域は

$$Z\leqq -1.96,\quad 1.96\leqq Z$$

$X=217$ のとき，$Z=1.7$ であるから，この値は棄却域に入らない。

よって，帰無仮説 H_0 は棄却できない。

したがって，この硬貨は表と裏の出方に偏りがあるとは判断できない。

練習

ある1つのさいころを180回投げたところ，1の目が39回出た。有意水準を5%として，次のことがいえると判断できるかをそれぞれ検定せよ。

(1)　このさいころの1の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ ではない。

(2)　このさいころは1の目が出やすい。

(1)　対立仮説 H_1 は「このさいころの1の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ ではない」

帰無仮説 H_0 は「このさいころの1の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ である」

H_0 が正しいとするとき，このさいころを投げて1の目が出る回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(180,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従う。X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=180\cdot\frac{1}{6}=30,\quad \sigma=\sqrt{180\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}=5$$

$n=180$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(30,\ 5^2)$ に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\dfrac{X-30}{5}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表より $P(-1.96\leqq Z\leqq 1.96)\fallingdotseq 0.95$ であるから，有意水準5%の棄却域は

$$Z\leqq -1.96,\quad 1.96\leqq Z$$

$X=39$ のとき，$Z=1.8$ であるから，この値は棄却域に入らない。

よって，帰無仮説 H_0 は棄却できない。

したがって，このさいころの1の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ ではないとは判断できない。

(2)　対立仮説 H_1 は「このさいころは1の目が出やすい」

帰無仮説 H_0 は「このさいころの1の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ である」

H_0 が正しいとするとき，このさいころを投げて1の目が出る回数を X とし，$Z=\dfrac{X-30}{5}$

とおくと，(1)より Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表より $P(0 \leqq Z \leqq 1.64) \fallingdotseq 0.45$ であるから，有意水準 5% の棄却域は

$$Z \geqq 1.64$$

$X=39$ のとき，$Z=1.8$ であるから，この値は棄却域に入る。

よって，帰無仮説 H_0 は棄却できる。

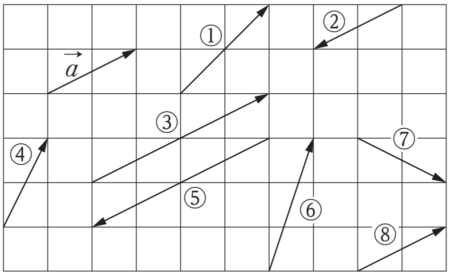
したがって，このさいころは１の目が出やすいと判断できる。

第 9 講　平面上のベクトル

PART1　有向線分とベクトル，ベクトルの相等

例題

右の図において，次のようなベクトルの組をすべて答えよ。



(1)　$\vec{a}$ と大きさが等しいベクトル

(2)　$\vec{a}$ と向きが等しいベクトル

(3)　$\vec{a}$ と等しいベクトル

(4)　$\vec{a}$ の逆ベクトル

(1)　②，④，⑦，⑧

(2)　③，⑧

(3)　⑧

(4)　②

練習

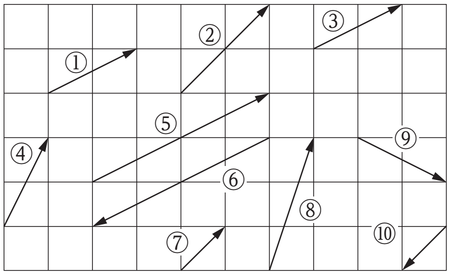
右の図において，次のようなベクトルの組をすべて答えよ。

(1)　大きさが等しいベクトル

(2)　向きが等しいベクトル

(3)　等しいベクトル

(4)　逆ベクトル



(1)　①と③と④と⑨，⑤と⑥，⑦と⑩

(2)　①と③と⑤，②と⑦

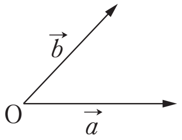
(3)　①と③

(4)　⑤と⑥，⑦と⑩

PART2　ベクトルの加法，減法，実数倍

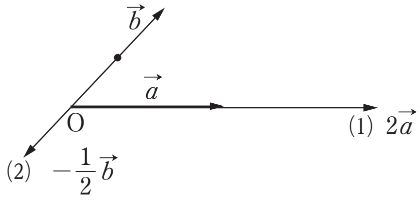
例題

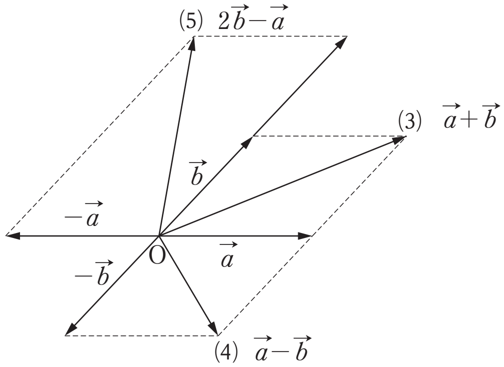
右の図のようにベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを，点 O を始点とする有向線分で図示せよ。



(1)　$2\vec{a}$　　(2)　$-\dfrac{1}{2}\vec{b}$　　(3)　$\vec{a}+\vec{b}$

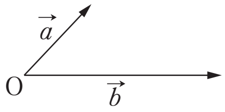
(4)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(5)　$2\vec{b}-\vec{a}$





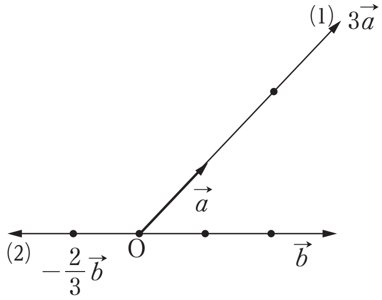
練習

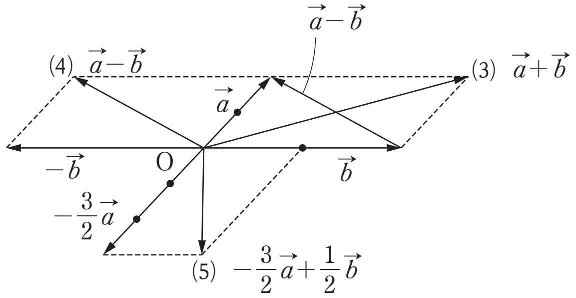
右の図のようにベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを，点 O を始点とする有向線分で図示せよ。



(1)　$3\vec{a}$　　(2)　$-\dfrac{2}{3}\vec{b}$　　(3)　$\vec{a}+\vec{b}$

(4)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(5)　$-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$



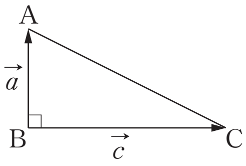


PART3　ベクトルの演算，ベクトルの平行

例題

(1)　等式 $\vec{x}-\vec{y}=\vec{a}$，$2\vec{x}+\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BC}=2$，$\angle\mathrm{B}=90°$ の直角三角形 ABC がある。$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



(i)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と同じ向きの単位ベクトル

(ii)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と平行な単位ベクトル

(1)　$\vec{x}-\vec{y}=\vec{a}$ …… ①，　$2\vec{x}+\vec{y}=\vec{b}$ …… ②とする。

①＋②より　$3\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$　　よって　$\vec{x}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

このとき，②より　$\vec{y}=-2\vec{x}+\vec{b}=-2\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)+\vec{b}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

(2) (i)　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=2$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

(ii)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{c}-\vec{a}$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きのものは

$$\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{c}-\vec{a})=-\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{a}+\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と反対向きのものは

$$-\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{c}-\vec{a})=\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{a}-\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{c}$$

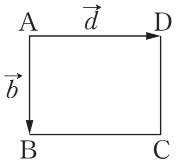
練習

(1)　等式 $5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}$，$3\vec{x}+5\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{AD}=4$ の長方形 ABCD がある。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(i)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きの単位ベクトル

(ii)　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と平行な単位ベクトル



(1)　$5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}$ …… ①，　$3\vec{x}+5\vec{y}=\vec{b}$ …… ② とする。

①×5＋②×3より　$34\vec{x}=5\vec{a}+3\vec{b}$　　よって　$\vec{x}=\dfrac{5}{34}\vec{a}+\dfrac{3}{34}\vec{b}$

このとき②より　$5\vec{y}=-3\vec{x}+\vec{b}=-3\left(\dfrac{5}{34}\vec{a}+\dfrac{3}{34}\vec{b}\right)+\vec{b}=-\dfrac{15}{34}\vec{a}+\dfrac{25}{34}\vec{b}$

よって　$\vec{y}=\dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{15}{34}\vec{a}+\dfrac{25}{34}\vec{b}\right)=-\dfrac{3}{34}\vec{a}+\dfrac{5}{34}\vec{b}$

(2) (i)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}+\vec{d}$

また，線分 AC は長方形 ABCD の対角線であることから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{5}(\vec{b}+\vec{d})=\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{d}$$

(ii)　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{d}-\vec{b}$

$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=5$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と同じ向きのものは

$$\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|}\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\frac{1}{5}(\vec{d}-\vec{b})=-\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{d}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と反対向きのものは

$$-\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|}\overrightarrow{\mathrm{BD}}=-\frac{1}{5}(\vec{d}-\vec{b})=\frac{1}{5}\vec{b}-\frac{1}{5}\vec{d}$$

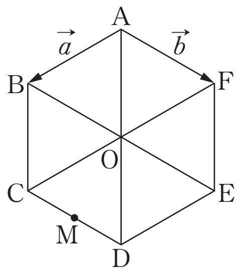
PART4　ベクトルの分解

例題

正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とし，対角線 BE と対角線 CF の交点を O，辺 CD の中点を M とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{FC}$　(2) $\overrightarrow{MC}$　(3) $\overrightarrow{AO}$

(4) $\overrightarrow{AM}$　(5) $\overrightarrow{FB}$



(1) $\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{FO}=2\overrightarrow{AB}=2\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{MC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{FA}=\dfrac{1}{2}(-\vec{b})=-\dfrac{1}{2}\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{a}+\vec{b}$

(4) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})+\dfrac{1}{2}\vec{b}=2\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{b}$

(5) $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}=-\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}-\vec{b}$

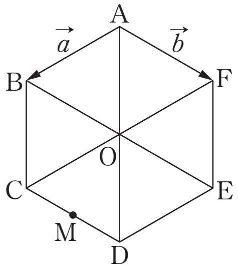
（別解）

$\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}=\vec{a}-\vec{b}$

練習

正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とし，対角線 BE と対角線 CF の交点を O，辺 CD の中点を M とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{OA}$　　(2)　$\overrightarrow{MF}$　　(3)　$\overrightarrow{BF}$



(1)　$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=-\vec{b}-\vec{a}=-\vec{a}-\vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}-(\vec{a}+\vec{b})=-2\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$

(3)　$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\vec{a}+\vec{b}$

（別解）

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=-\vec{a}+\vec{b}$

第 10 講　ベクトルの成分表示，ベクトルの内積

PART1　ベクトルの成分と大きさ

例題

$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-3,\ 6)$ のとき，次のベクトルを成分で表し，その大きさを求めよ。

(1)　$3\vec{a}-2\vec{b}$　　　　(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$

(1)　$3\vec{a}-2\vec{b}=3(2,\ 1)-2(-3,\ 6)=(6,\ 3)+(6,\ -12)=(12,\ -9)$

$|3\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{12^2+(-9)^2}=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15$

(別解)

$3\vec{a}-2\vec{b}=(12,\ -9)=3(4,\ -3)$　より　$|3\vec{a}-2\vec{b}|=3\sqrt{4^2+(-3)^2}=3\times5=15$

(2)　$\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1)+t(-3,\ 6)=(-3t+2,\ 6t+1)$

$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(-3t+2)^2+(6t+1)^2}=\sqrt{45t^2+5}$

練習

$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(7,\ 1)$ のとき，次のベクトルを成分で表し，その大きさを求めよ。

(1)　$-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$

(1)　$-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}=-\dfrac{3}{2}(1,\ 3)+\dfrac{1}{2}(7,\ 1)=\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{9}{2}\right)+\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)=(2,\ -4)$

$\left|-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$

（別解）

$-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}=(2,\ -4)=2(1,\ -2)$　より　$\left|-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right|=2\sqrt{1^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$

(2)　$\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 3)+t(7,\ 1)=(7t+1,\ t+3)$

$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(7t+1)^2+(t+3)^2}=\sqrt{50t^2+20t+10}$

PART2　ベクトルの成分と平行

例題

(1) $\vec{c}=(3,\ 1)$ と平行な単位ベクトルを成分で表せ。

(2) 2つのベクトル $\vec{a}=(5,\ 2)$, $\vec{b}=(x,\ 8)$ が平行になるときの x の値を求めよ。

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ より，$\vec{c}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\vec{c}$ と同じ向きのものは

$$\frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}=\frac{1}{\sqrt{10}}(3,\ 1)=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\left(\frac{3\sqrt{10}}{10},\ \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

$\vec{c}$ と反対向きのものは

$$-\frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}=-\frac{1}{\sqrt{10}}(3,\ 1)=\left(-\frac{3}{\sqrt{10}},\ -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10},\ -\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

(2) $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}\parallel\vec{b}$ となるのは，$\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在するときである。

$(x,\ 8)=k(5,\ 2)$ より　$x=5k,\ 8=2k$

よって　$k=4,\ x=20$

(別解)

$\vec{a}\parallel\vec{b}$ より　$5\cdot8-2x=0$　　よって　$x=20$

練習

(1) $\vec{c}=(2,\ -3)$ と同じ向きの単位ベクトルを成分で表せ。

(2) 2 つのベクトル $\vec{a}=(-1,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ x)$ について，$2\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が平行になるときの x の値を求めよ。

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$ であるから，$\vec{c}$ と平行な単位ベクトルのうち $\vec{c}$ と同じ向きのものは

$$\frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}=\frac{1}{\sqrt{13}}(2,\ -3)=\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\ -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)=\left(\frac{2\sqrt{13}}{13},\ -\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$$

(2) $2\vec{a}+3\vec{b}=2(-1,\ 2)+3(1,\ x)=(1,\ 3x+4)$

$\vec{a}-2\vec{b}=(-1,\ 2)-2(1,\ x)=(-3,\ -2x+2)$

$2\vec{a}+3\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}-2\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，$2\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が平行となるのは，

$2\vec{a}+3\vec{b}=k\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$ となる実数 k が存在するときである。

$(1,\ 3x+4)=k(-3,\ -2x+2)$ より

$1=-3k$ …… ①,　　$3x+4=k(-2x+2)$ …… ②

①より　$k=-\dfrac{1}{3}$

このとき②より　$3x+4=-\dfrac{1}{3}(-2x+2)$

よって　$x=-2$

(別解)

$\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)/\!/\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$ より

$1\cdot(-2x+2)=(3x+4)\cdot(-3)$

よって　$x=-2$

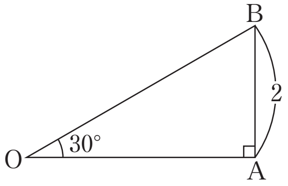
PART3　ベクトルの内積

例題

右の図において，次の内積を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$

(3)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BO}$　　(4)　$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OA}$

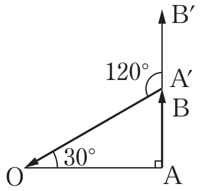


$AB=2$ より $OB=4$，$OA=2\sqrt{3}$

(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=2\sqrt{3}\times4\times\cos30^\circ=12$

(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AO}|\cos\angle BAO=2\times2\sqrt{3}\times\cos90^\circ=0$

(3)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BO}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BO}|\cos120^\circ=2\times4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-4$



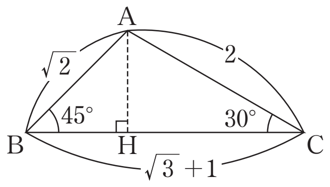
(4)　$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{OA}|\cos180^\circ=2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times(-1)=-12$

練習

右の図において，次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$　　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}$

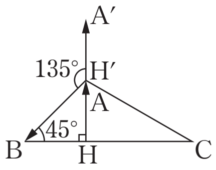
(3) $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AH}$　　(4) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC}$



AH＝1，BH＝1，CH＝$\sqrt{3}$ である。

(1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AH}|\cos 60°=2\times1\times\dfrac{1}{2}=1$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{HA}|\cos 135°=\sqrt{2}\times1\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1$



(3) $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AH}=|\overrightarrow{CH}||\overrightarrow{AH}|\cos 90°=\sqrt{3}\times1\times0=0$

(4) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC}=|\overrightarrow{BH}||\overrightarrow{HC}|\cos 0°=1\times\sqrt{3}\times1=\sqrt{3}$

PART4　ベクトルの内積と成分，ベクトルのなす角

例題

(1)　次の2つのベクトルの内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(i)　$\vec{a}=(-1,\ 5)$，$\vec{b}=(2,\ 3)$　　(ii)　$\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$

(2)　$\vec{a}=(-6,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ x)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるような x の値を求めよ。

また，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるような x の値を求めよ。

(1)(i)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times2+5\times3=13$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$，$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{13}{\sqrt{26}\sqrt{13}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より $\theta=45^\circ$

(ii)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times(-1)+2\times2=0$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ より　$\theta=90^\circ$

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるのは $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ のとき

よって　$(-6)\times2+2\times x=0$　より　$x=6$

また

$$\vec{a}+\vec{b}=(-4,\ 2+x),\ \vec{a}-\vec{b}=(-8,\ 2-x)$$

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるのは　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ のとき

よって

$$(-4)\times(-8)+(2+x)(2-x)=0 \qquad x^2=36 \qquad x=\pm6$$

練習

(1)　2 つのベクトル $\vec{a}=(-\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -\sqrt{3})$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(2)　$\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(5,\ 2)$，$\vec{x}=(t-2,\ 4)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{x}$ が垂直になるような t の値を求めよ。また，$\vec{x}+\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直になるような t の値を求めよ。

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-\sqrt{3})\times1+1\times(-\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-2\sqrt{3}}{2\times2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=150^\circ$

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{x}$ が垂直になるのは $\vec{a}\cdot\vec{x}=0$ のとき

よって

$2\times(t-2)+(-1)\times4=0$ より　$t=4$

$\vec{x}+\vec{a}=(t,\ 3)$，$\vec{x}-\vec{b}=(t-7,\ 2)$

$\vec{x}+\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直になるのは　$(\vec{x}+\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$ のとき

よって

$t\times(t-7)+3\times2=0$　　$t^2-7t+6=0$　　$(t-1)(t-6)=0$　　$t=1,\ 6$

第 11 講　内積の性質，位置ベクトル

PART1　内積の性質

例題

(1)　次の等式を証明せよ。

(i)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$　　(ii)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(iii)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ のとき，$2\vec{a}+\vec{b}$ の大きさを求めよ。

(1) (i)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$

(ii)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(iii)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\times1^2+4\times2+3^2=21$

$|2\vec{a}+\vec{b}|\geqq0$ より　$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{21}$

練習

(1)　次の等式を証明せよ。

(i)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(ii)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ のとき，$2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

(1) (i)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(ii)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=4\times2^2-12\times(-2)+9\times3^2=121$

$|2\vec{a}-3\vec{b}|\geqq0$　より　$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{121}=11$

PART2　ベクトルの大きさと内積

例題

次の条件を満たす 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$|3\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$

(2)　$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=2$，$3\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直

(1)　$|3\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$　より

$$|3\vec{a}+2\vec{b}|^2=28 \qquad 9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=28$$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$　より

$$9\times2^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times1^2=28$$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-1}{2\times1}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=120^\circ$

(2)　$3\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直であるから

$$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0 \qquad 3|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$$

$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=2$ より

$$3\times(\sqrt{2})^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-2\times2^2=0$$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}\times2}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=135^\circ$

練習

次の条件を満たす 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1)　$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|2\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{19}$

(2)　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+6\vec{b}$ が垂直

(1)　$|2\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{19}$ より

$$|2\vec{a}+5\vec{b}|^2=19$$

$$4|\vec{a}|^2+20\vec{a}\cdot\vec{b}+25|\vec{b}|^2=19$$

$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$ より

$$4\times4^2+20\vec{a}\cdot\vec{b}+25\times(\sqrt{3})^2=19$$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-6}{4\times\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ より　$\theta=150°$

(2)　$\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+6\vec{b}$ が垂直であるから

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+6\vec{b})=0$$

$$|\vec{a}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}-6|\vec{b}|^2=0$$

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$ より

$$3^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}-6\times2^2=0$$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{3\times2}=\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ より　$\theta=60°$

PART3　位置ベクトル

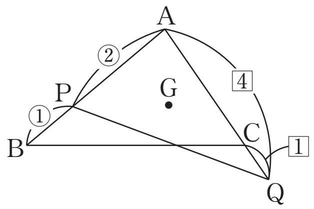
例題

3 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ において，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　辺 AB を 2：1 に内分する点 P　　(2)　辺 AC を 4：1 に外分する点 Q

(3)　$\triangle\mathrm{APQ}$ の重心 G

$\mathrm{P}(\vec{p})$，$\mathrm{Q}(\vec{q})$，$\mathrm{G}(\vec{g})$ とする。



(1)　$\vec{p}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

(2)　$\vec{q}=\dfrac{-\vec{a}+4\vec{c}}{4-1}=\dfrac{-\vec{a}+4\vec{c}}{3}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{4}{3}\vec{c}$

(3)　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{p}+\vec{q}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{4}{3}\vec{c}\right)=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}+\dfrac{4}{9}\vec{c}$

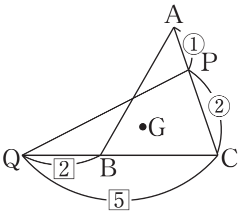
練習

3点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ において，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　辺 AC を 1：2 に内分する点 P　　(2)　辺 BC を 2：5 に外分する点 Q

(3)　$\triangle CPQ$ の重心 G

$P(\vec{p})$，$Q(\vec{q})$，$G(\vec{g})$ とする。



(1)　$\vec{p}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{c}}{1+2}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(2)　$\vec{q}=\dfrac{5\vec{b}-2\vec{c}}{-2+5}=\dfrac{5}{3}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{c}$

(3)　$\vec{g}=\dfrac{\vec{c}+\vec{p}+\vec{q}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{c}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{3}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{5}{9}\vec{b}+\dfrac{2}{9}\vec{c}$

PART4　共線条件

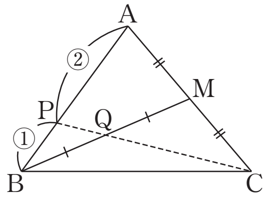
例題

△ABC において，辺 AB を 2：1 に内分する点を P，辺 AC の中点を M，線分 BM の中点を Q とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　3 点 P，Q，C は一直線上にあることを証明せよ。

(3)　PQ：QC を求めよ。



(1)　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$ より

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}}{2}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

(2)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}\right)-\dfrac{2}{3}\vec{b}=-\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}=\dfrac{1}{12}(-2\vec{b}+3\vec{c})$

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}=\vec{c}-\dfrac{2}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}(-2\vec{b}+3\vec{c})$

よって，$\overrightarrow{PC}=4\overrightarrow{PQ}$ より，3 点 P，Q，C は一直線上にある。

(3)　(2)より　PQ：QC＝1：3

練習

△ABC において，辺 AB を 3：2 に内分する点を D，辺 BC を 2：1 に外分する点を E，辺 BC の中点を M とし，△ABC の重心を G とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

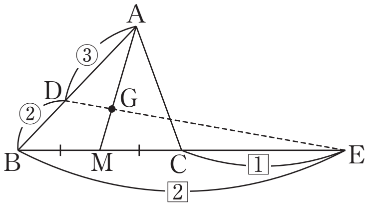
(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AG}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3)　3 点 D，G，E は一直線上にあることを証明し，DG：GE を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{AE}=\dfrac{-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{2-1}=-\vec{b}+2\vec{c}$



(2)　$\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(3)　$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AD}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)-\dfrac{3}{5}\vec{b}=-\dfrac{4}{15}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{15}(-4\vec{b}+5\vec{c})$

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=(-\vec{b}+2\vec{c})-\dfrac{3}{5}\vec{b}=-\dfrac{8}{5}\vec{b}+2\vec{c}=\dfrac{6}{15}(-4\vec{b}+5\vec{c})$

よって，$\overrightarrow{DE}=6\overrightarrow{DG}$ であるから，3 点 D，G，E は一直線上にある。

また，DG：GE＝1：5 である。

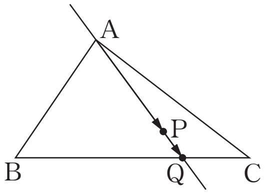
第 12 講　ベクトルと平面図形

PART1　等式を満たす点の位置

例題

△ABC と点 P が $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}\overrightarrow{AC}$ を満たす。また，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする。このとき，AP：PQ，BQ：QC を求めよ。

$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}\overrightarrow{AC}=\frac{7}{9}\left(\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AC}\right)$



$\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AC}$ は，点 A を始点とし線分 BC を 5：2 に内分する点の位置ベクトルである。

3 点 A，P，Q は一直線上にあり，点 Q は直線 BC 上にあることから

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AC}$$

であり　BQ：QC＝5：2

また，$\overrightarrow{AP}=\frac{7}{9}\overrightarrow{AQ}$ より　AP：PQ＝7：2

（別解）

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$（$k$ は実数）とおくと

$$\overrightarrow{AQ}=k\left(\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{9}k\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}k\overrightarrow{AC}$$

点 Q は直線 BC 上の点であるから

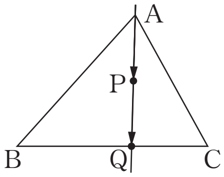
$$\frac{2}{9}k+\frac{5}{9}k=1 \qquad \text{よって} \quad k=\frac{9}{7}$$

したがって，$\overrightarrow{AQ}=\frac{9}{7}\overrightarrow{AP}$ より　AP：PQ＝7：2

また，$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AC}$ より　BQ：QC＝5：2

練習

△ABC と点Pが $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}$ を満たす。また，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする。このとき，AP：PQ，BQ：QC を求めよ。



$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{5}{10}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right)$

$\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ は，点Aを始点とし線分 BC を 3：2 に内分する点の位置ベクトルである。

3点A，P，Qは一直線上にあり，点Qは直線 BC 上にあることから

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$$

であり　BQ：QC＝3：2

また，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$ より　AP：PQ＝1：1

(別解)

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$ (k は実数)とおくと

$$\overrightarrow{AQ}=k\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{5}k\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}k\overrightarrow{AC}$$

点Qは直線 BC 上の点であるから

$$\frac{1}{5}k+\frac{3}{10}k=1 \qquad \text{よって} \quad k=2$$

したがって，$\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AP}$ より　AP：PQ＝1：1

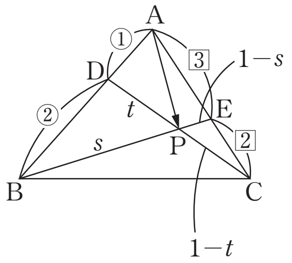
また，$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ より　BQ：QC＝3：2

PART2　交点の位置ベクトル(係数比較)

例題

△ABC において, 辺 AB を 1:2 に内分する点を D, 辺 AC を 3:2 に内分する点を E とし, 線分 BE と線分 CD の交点を P とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ として, $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

BP : PE $=s:(1-s)$ とおくと



$$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AE}$$

$$=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\times\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=(1-s)\vec{b}+\frac{3}{5}s\vec{c}\ \cdots\cdots ①$$

DP : PC $=t:(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AC}=(1-t)\times\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\ \cdots\cdots ②$$

①, ②より　$(1-s)\vec{b}+\frac{3}{5}s\vec{c}=\frac{1}{3}(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$

$\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次独立であるから

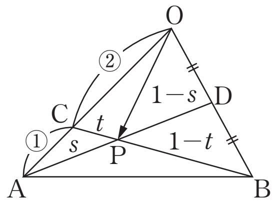
$$1-s=\frac{1}{3}(1-t),\quad \frac{3}{5}s=t$$

よって　$s=\frac{5}{6}$, $t=\frac{1}{2}$

したがって　$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

練習

△OAB において，辺 OA を 2：1 に内分する点を C，辺 OB の中点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



AP：PD＝s：$(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$$

$$=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\times\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}\ \cdots\cdots ①$$

CP：PB＝t：$(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OB}=(1-t)\times\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\ \cdots\cdots ②$$

①，②より　$(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}=\frac{2}{3}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は1次独立であるから

$$1-s=\frac{2}{3}(1-t),\ \frac{1}{2}s=t$$

よって　$s=\frac{1}{2}$，$t=\frac{1}{4}$

したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

PART3　交点の位置ベクトル(係数の和が 1)

例題

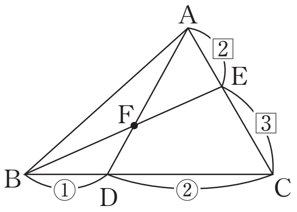
△ABC において，辺 BC を 1：2 に内分する点を D，辺 CA を 3：2 に内分する点を E とする。

また，線分 AD と線分 BE の交点を F とする。

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ。

(2)　$\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表し，BF：FE，AF：FD を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{1+2}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$



(2)　$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AD}$ (k は実数) …… ① とおくと，$\overrightarrow{AC}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AE}$ より

$$\overrightarrow{AF}=k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{AC}\ \cdots\cdots ②$$

$$=\frac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}k\overrightarrow{AE}\ \cdots\cdots ③$$

点 F は線分 BE 上の点であるから

$$\frac{2}{3}k+\frac{5}{6}k=1 \qquad k=\frac{2}{3}$$

よって，②より

$$\overrightarrow{AF}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$$

また，③より　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{9}\overrightarrow{AE}$ であるから

BF：FE＝5：4

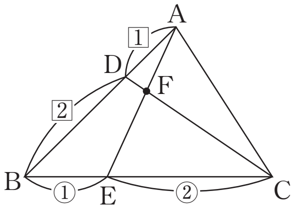
①より $\overrightarrow{AF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ であるから AF：FD＝2：1

練習

△ABC において，辺 AB，BC を 1：2 に内分する点をそれぞれ D，E とし，線分 CD と線分 AE の交点を F とする。

(1) $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表し，DF：FC，AF：FE を求めよ。



(1) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{1+2}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AE}$（$k$ は実数）…… ①とおくと，　$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AD}$ より

$$\overrightarrow{AF}=k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{AC} \cdots\cdots ②$$

$$=2k\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{AC} \cdots\cdots ③$$

点 F は線分 CD 上の点であるから　$2k+\dfrac{1}{3}k=1$　　$k=\dfrac{3}{7}$

よって，②より　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{7}\overrightarrow{AC}$

また，③より　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{6}{7}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{7}\overrightarrow{AC}$ であるから　DF：FC＝1：6

①より，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AE}$ であるから　AF：FE＝3：4

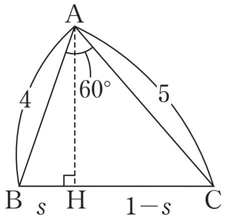
PART4　交点の位置ベクトル（三角形の高さ）

例題

AB＝4，AC＝5，∠A＝60° の △ABC において，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC の交点を H とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。　(2)　$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする。



(1)　$|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=5$ より

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60°=4\times5\times\frac{1}{2}=10$$

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=10$

(2)　BH：HC＝s：$(1-s)$ とすると　$\overrightarrow{AH}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ より　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$$\{(1-s)\vec{b}+s\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$$

$$(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c}-(1-s)|\vec{b}|^2+s|\vec{c}|^2-s\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

$$10(1-s)-16(1-s)+25s-10s=0$$

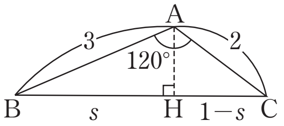
よって　$s=\dfrac{2}{7}$

したがって　$\overrightarrow{AH}=\dfrac{5}{7}\vec{b}+\dfrac{2}{7}\vec{c}=\dfrac{5}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{7}\overrightarrow{AC}$

練習

$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{AC}=2$，$\angle\mathrm{A}=120^\circ$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ において，辺 BC 上に点 H を $\mathrm{AH}\perp\mathrm{BC}$ となるようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ。　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする。

(1) $|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=2$ より

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos120^\circ=3\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-3$

(2) $\mathrm{BH}:\mathrm{HC}=s:(1-s)$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$

$$\{(1-s)\vec{b}+s\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$$

$$(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c}-(1-s)|\vec{b}|^2+s|\vec{c}|^2-s\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

$$-3(1-s)-9(1-s)+4s+3s=0$$

よって　$s=\dfrac{12}{19}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{7}{19}\vec{b}+\dfrac{12}{19}\vec{c}=\dfrac{7}{19}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{12}{19}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

第 13 講　ベクトル方程式

PART1　直線のベクトル方程式

例題

次の直線の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ。

(1)　点 $\mathrm{A}(4,\ 3)$ を通り，ベクトル $\vec{d}=(2,\ 1)$ に平行な直線

(2)　2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ -5)$ を通る直線

(1)　$(x,\ y)=(4,\ 3)+t(2,\ 1)=(2t+4,\ t+3)$

よって　$\begin{cases} x=2t+4 \\ y=t+3 \end{cases}$

(2)　$(x,\ y)=(1-t)(-1,\ 1)+t(2,\ -5)=(3t-1,\ -6t+1)$

よって　$\begin{cases} x=3t-1 \\ y=-6t+1 \end{cases}$

練習

次の直線の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ。

(1)　点 A(3, 2) を通り，ベクトル $\vec{d}=(1,\ -3)$ に平行な直線

(2)　2 点 A$(-1,\ 0)$，B(0, 2) を通る直線

(1)　$(x,\ y)=(3,\ 2)+t(1,\ -3)=(t+3,\ -3t+2)$

よって　$\begin{cases} x=t+3 \\ y=-3t+2 \end{cases}$

(2)　$(x,\ y)=(1-t)(-1,\ 0)+t(0,\ 2)=(t-1,\ 2t)$

よって　$\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t \end{cases}$

PART2　法線ベクトルと直線のベクトル方程式

例題

(1)　点 $\mathrm{A}(3,\ -4)$ を通り，$\vec{n}=(2,\ -3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(2)　点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$ から直線 $l：x-3y+2=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする。H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ。

(1)　求める直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-3,\ y+4)$ より　$2(x-3)-3(y+4)=0$

よって，求める方程式は $2x-3y-18=0$

(2)　$\vec{n}=(1,\ -3)$ とおくと，$\vec{n}$ は直線 l の法線ベクトルの1つである。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\parallel\vec{n}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$（$k$ は実数）とおける。

$\mathrm{H}(s,\ t)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(s,\ t+1)$ より

$$(s,\ t+1)=k(1,\ -3)$$

よって，$s=k,\ t+1=-3k$ より

$$s=k,\ t=-3k-1 \cdots\cdots ①$$

また，点 H は直線 l 上の点であるから

$$s-3t+2=0 \cdots\cdots ②$$

①を②に代入して

$$k-3(-3k-1)+2=0 \qquad k=-\frac{1}{2}$$

このとき①より　$s=-\dfrac{1}{2},\ t=\dfrac{1}{2}$

よって，H の座標は $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ より

$$\mathrm{AH}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

練習

(1)　点 $\mathrm{A}(5,\ -1)$ を通り，$\vec{n}=(1,\ 3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(2)　点 $\mathrm{A}(4,\ 1)$ から直線 $l:2x-y+3=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする。H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ。

(1)　求める直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-5,\ y+1)$ より　$1\times(x-5)+3\times(y+1)=0$

よって，求める方程式は　$x+3y-2=0$

(2)　$\vec{n}=(2,\ -1)$ とおくと，$\vec{n}$ は直線 l の法線ベクトルの 1 つである。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\parallel\vec{n}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$（$k$ は実数）とおける。

$\mathrm{H}(s,\ t)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(s-4,\ t-1)$ より

$$(s-4,\ t-1)=k(2,\ -1)$$

よって，$s-4=2k$，$t-1=-k$ より

$$s=2k+4,\ t=-k+1 \cdots\cdots ①$$

また，点 H は直線 l 上の点であるから

$$2s-t+3=0 \cdots\cdots ②$$

①を②に代入して

$$2(2k+4)-(-k+1)+3=0 \qquad k=-2$$

このとき①より　$s=0$，$t=3$

よって，H の座標は $(0,\ 3)$

また $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(-4,\ 2)$ より

$$\mathrm{AH}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$$

PART3　円のベクトル方程式

例題

平面上の定点 A$(\vec{a})$ と動点 P$(\vec{p})$ に対し, 次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。

(1) $|\vec{p}-\vec{a}|=1$　　(2) $|3\vec{p}-2\vec{a}|=6$

(1) 点 A を中心とする半径 1 の円

(2) $|3\vec{p}-2\vec{a}|=6$ より　$3\left|\vec{p}-\dfrac{2}{3}\vec{a}\right|=6$

すなわち　$\left|\vec{p}-\dfrac{2}{3}\vec{a}\right|=2$

よって，線分 OA を 2：1 に内分する点を中心とする半径 2 の円

練習

平面上の異なる 2 つの定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ と動点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$|2\vec{p}-\vec{a}|=3$　　(2)　$|3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=5$

(1)　$|2\vec{p}-\vec{a}|=3$　より　　$2\left|\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right|=3$

すなわち　　$\left|\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right|=\dfrac{3}{2}$

よって，線分 OA の中点を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の円

(2)　$|3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=5$　より

$|3(\vec{p}-\vec{a})+2(\vec{p}-\vec{b})|=5$

$|5\vec{p}-(3\vec{a}+2\vec{b})|=5$

つまり　$\left|\vec{p}-\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}\right|=1$

よって，線分 AB を 2：3 に内分する点を中心とする半径 1 の円

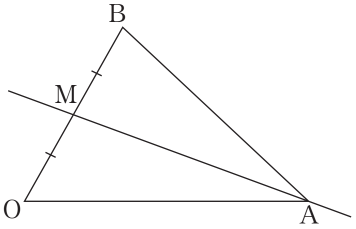
PART4　ベクトルの終点の存在範囲

例題

△OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ とする。実数 α，β が次の条件を満たすとき，点 P の存在範囲を求めよ。

(1)　$\alpha+2\beta=1$　　　(2)　$\alpha+\beta\leqq\frac{1}{2}$，$\alpha\geqq0$，$\beta\geqq0$

(1)　$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}=\alpha\overrightarrow{OA}+2\beta\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$



よって，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}$ とすると，点 P の存在範囲は

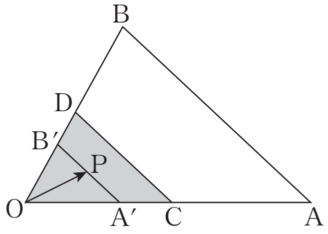
直線 AM である。

(2)　$\alpha+\beta=k$ とおくと，$0\leqq k\leqq\frac{1}{2}$

$k=0$ のとき

$\alpha=\beta=0$ であり，点 P は点 O に一致する。

$0<k\leqq\frac{1}{2}$ のとき



$\alpha+\beta=k$ より　$\frac{\alpha}{k}+\frac{\beta}{k}=1$

$$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}=\frac{\alpha}{k}(k\overrightarrow{OA})+\frac{\beta}{k}(k\overrightarrow{OB})$$

ここで，$\frac{\alpha}{k}=\alpha'$，$\frac{\beta}{k}=\beta'$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=\alpha'(k\overrightarrow{OA})+\beta'(k\overrightarrow{OB}),\ \alpha'+\beta'=1,\ \alpha'\geqq0,\ \beta'\geqq0$$

であるから，$k\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$k\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とする点 A′，B′ をとると，点 P の存在範囲は，辺 AB に平行な線分 A′B′ である。

ここで，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とし，k を $0<k\leqq\frac{1}{2}$ の範囲で変化させると，

線分 A′B′ は，点 O を除く △OCD の周および内部を平行に動く。

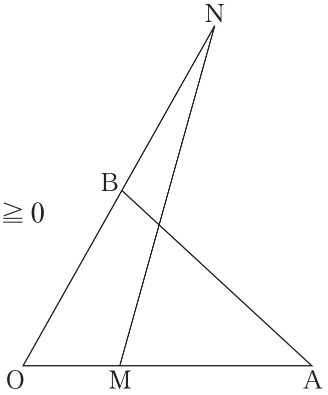
以上より，点 P の存在範囲は，△OCD の周および内部である。

練習

△OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。実数 α，β が次の条件を満たすとき，点 P の存在範囲を求めよ。

(1)　$3\alpha+\dfrac{1}{2}\beta=1$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$　　(2)　$\alpha+\beta\leqq 2$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3\alpha\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\dfrac{1}{2}\beta\left(2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$



よって，$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\alpha\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{1}{2}\beta\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}},\ 3\alpha+\frac{1}{2}\beta=1,\ 3\alpha\geqq 0,\ \frac{1}{2}\beta\geqq 0$$

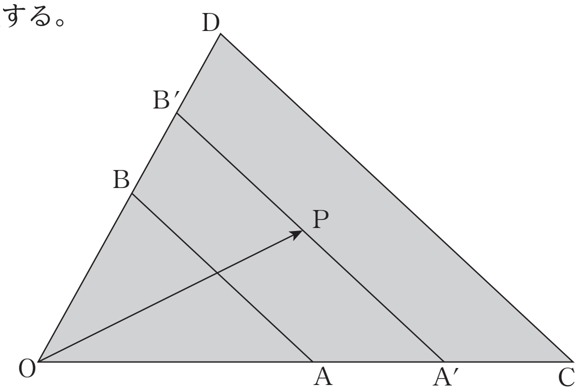
したがって，点 P の存在範囲は線分 MN

(2)　$\alpha+\beta=k$ とおくと，$0\leqq k\leqq 2$

$k=0$ のとき

　$\alpha=\beta=0$ であり，点 P は点 O に一致する。

$0<k\leqq 2$ のとき



　$\alpha+\beta=k$ より　$\dfrac{\alpha}{k}+\dfrac{\beta}{k}=1$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\frac{\alpha}{k}\left(k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\frac{\beta}{k}\left(k\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

　ここで，$\dfrac{\alpha}{k}=\alpha'$，$\dfrac{\beta}{k}=\beta'$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha'\left(k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\beta'\left(k\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right),\ \alpha'+\beta'=1,\ \alpha'\geqq 0,\ \beta'\geqq 0$$

　であるから，$k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$k\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ とする点 A′，B′ をとると，点 P の存在範囲は，辺 AB に平行な線分 A′B′ である。

ここで，$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とし，k を $0<k\leqq 2$ の範囲で変化させると，

線分 A′B′ は，点 O を除く △OCD の周および内部を平行に動く。

以上より，点 P の存在範囲は，△OCD の周および内部

第14講　空間ベクトル

PART1　空間の座標

例題

(1)　点 P(1, 2, 3) に対して，次の点の座標を求めよ。

(i)　xy 平面に関して対称な点 A　(ii)　yz 平面に関して対称な点 B

(iii)　zx 平面に関して対称な点 C　(iv)　x 軸に関して対称な点 D

(v)　y 軸に関して対称な点 E　(vi)　z 軸に関して対称な点 F

(vii)　点 (0, −1, 5) に関して対称な点 G

(2)　2点 A(1, 1, 0)，B(3, −2, 4) の間の距離を求めよ。

(1) (i)　(1, 2, −3)　(ii)　(−1, 2, 3)　(iii)　(1, −2, 3)

(iv)　(1, −2, −3)　(v)　(−1, 2, −3)　(vi)　(−1, −2, 3)

(vii)　G(x, y, z) とすると

$$\frac{1+x}{2}=0,\ \frac{2+y}{2}=-1,\ \frac{3+z}{2}=5 \quad より \quad x=-1,\ y=-4,\ z=7$$

したがって　G(−1, −4, 7)

(2)　$AB=\sqrt{(3-1)^2+(-2-1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{29}$

練習

(1)　点 $P(-2,\ 1,\ -1)$ に対して，次の点の座標を求めよ。

(i)　xy 平面に関して対称な点 A　　(ii)　z 軸に関して対称な点 B

(iii)　点 $(-1,\ 1,\ 0)$ に関して対称な点 C

(2)　2点 $A(3,\ 2,\ 1)$，$B(1,\ 4,\ -1)$ の間の距離を求めよ。

(1) (i)　$(-2,\ 1,\ 1)$　　(ii)　$(2,\ -1,\ -1)$

(iii)　$C(x,\ y,\ z)$ とすると

$\dfrac{-2+x}{2}=-1$　$\dfrac{1+y}{2}=1$　$\dfrac{-1+z}{2}=0$　より　$x=0,\ y=1,\ z=1$

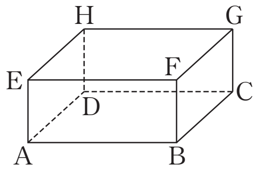
したがって　$C(0,\ 1,\ 1)$

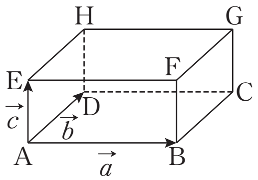
(2)　$AB=\sqrt{(1-3)^2+(4-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

PART2　空間のベクトル

例題

直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。このとき $\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{BH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。





$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\vec{a}+\vec{c}$

$\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}=-\vec{b}-\vec{c}$

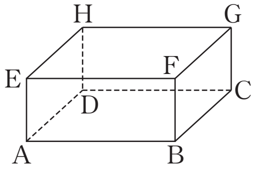
$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

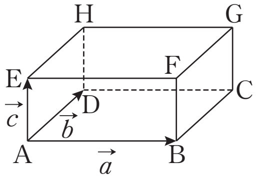
$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

(別解) $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}=(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

練習

直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする。このとき $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。





$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{HC}}=\overrightarrow{\mathrm{HG}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{a}-\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}+\overrightarrow{\mathrm{FG}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

（別解）　$\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

（別解）　$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(\vec{a}+\vec{c})-\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

PART3　ベクトルの成分と演算，座標と成分表示

例題

(1) $\vec{a}=(1,\ -1,\ 2)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 1)$，$\vec{c}=(2,\ -1,\ -2)$ のとき，$|\vec{a}|$ を求めよ。また，$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。

(2) $\vec{a}=(1,\ -2,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ -2)$，$\vec{c}=(3,\ -2,\ -2)$ のとき，$\vec{p}=(-2,\ 3,\ -2)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$

$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=2(1,\ -1,\ 2)-3(0,\ 2,\ 1)+(2,\ -1,\ -2)$

$=(2,\ -2,\ 4)+(0,\ -6,\ -3)+(2,\ -1,\ -2)=(4,\ -9,\ -1)$

$|2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{4^2+(-9)^2+(-1)^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$

(2) $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおくと

$(-2,\ 3,\ -2)=s(1,\ -2,\ -1)+t(1,\ -1,\ -2)+u(3,\ -2,\ -2)$

$=(s+t+3u,\ -2s-t-2u,\ -s-2t-2u)$

よって

$s+t+3u=-2$ …… ①

$-2s-t-2u=3$ …… ②

$-s-2t-2u=-2$ …… ③

①＋②より　$-s+u=1$ …… ④

①×2＋③より　$s+4u=-6$ …… ⑤

④，⑤より　$s=-2,\ u=-1$　　このとき，①より　$t=3$

したがって　$\vec{p}=-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

練習

⑴ $\vec{a}=(3,\ 1,\ 4)$，$\vec{b}=(-1,\ 6,\ 3)$，$\vec{c}=(-2,\ 5,\ 4)$ のとき，$|\vec{c}|$ を求めよ。また，$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。

⑵ $\vec{a}=(0,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 2,\ -3)$，$\vec{c}=(3,\ 4,\ -1)$ のとき，$\vec{p}=(-6,\ 7,\ -3)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

⑴ $|\vec{c}|=\sqrt{(-2)^2+5^2+4^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}=2(3,\ 1,\ 4)+(-1,\ 6,\ 3)-3(-2,\ 5,\ 4)$

$=(6,\ 2,\ 8)+(-1,\ 6,\ 3)+(6,\ -15,\ -12)=(11,\ -7,\ -1)$

$|2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}|=\sqrt{11^2+(-7)^2+(-1)^2}=\sqrt{171}=3\sqrt{19}$

⑵ $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおくと

$(-6,\ 7,\ -3)=s(0,\ 1,\ 1)+t(-1,\ 2,\ -3)+u(3,\ 4,\ -1)$

$=(-t+3u,\ s+2t+4u,\ s-3t-u)$

よって

$-t+3u=-6$ …… ①

$s+2t+4u=7$ …… ②

$s-3t-u=-3$ …… ③

②−③より　$t+u=2$

これと①より　$t=3$，$u=-1$

このとき，②より　$s=5$

したがって　$\vec{p}=5\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

PART4　ベクトルの内積

例題

A(2，1，0)，B(0，2，1)，C(1，0，2) とするとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角 θ を求めよ。また，△ABC の面積を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 1,\ 1)$　より　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ -1,\ 2)$　より　$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2)\times(-1)+1\times(-1)+1\times2=3$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$　であるから

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=60^\circ$

したがって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

練習

$A(2,\ 1,\ 2)$，$B(4,\ 3,\ 6)$，$C(0,\ 1,\ 0)$ とするとき，2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ のなす角 θ を求めよ。また，$\triangle ABC$ の面積を求めよ。

$\overrightarrow{AB}=(2,\ 2,\ 4)$　より　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+2^2+4^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 0,\ -2)$　より　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-2)^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

また，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-2)+2\times0+4\times(-2)=-12$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-12}{2\sqrt{6}\times2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　であるから

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=150^\circ$

したがって　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=2\sqrt{3}$

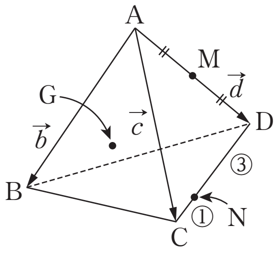
第 15 講　空間図形とベクトル

PART1　位置ベクトル

例題

四面体 ABCD において，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。辺 AD の中点を M，辺 CD を 1：3 に内分する点を N，△ABC の重心を G とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{MN}$　　　　(2)　$\overrightarrow{NG}$



$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{d}$$

$$\overrightarrow{AN}=\frac{3\vec{c}+\vec{d}}{1+3}=\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}$$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

(1)　$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\left(\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}\right)-\frac{1}{2}\vec{d}$

$$=\frac{3}{4}\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{d}$$

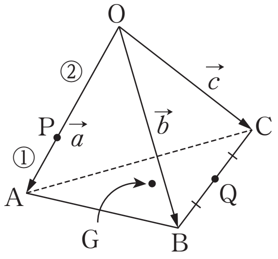
(2)　$\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AN}=\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)-\left(\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}\right)$

$$=\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{5}{12}\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{d}$$

練習

四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。辺OAを2：1に内分する点をP，辺BCの中点をQ，△ABC の重心をGとするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{PQ}$　　　(2)　$\overrightarrow{GQ}$



$$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

(1)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\frac{2}{3}\vec{a}$

$$=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

(2)　$\overrightarrow{GQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OG}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)$

$$=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$$

PART2　空間ベクトルの内積と大きさ

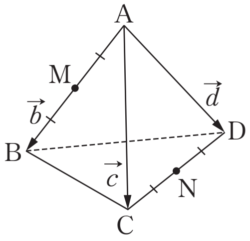
例題

1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD がある。辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{MN}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ。また，$\overrightarrow{MN}$ の大きさを求めよ。

(3)　$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}$ の値を求めよ。



(1)　$\angle BAC=60°$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60°=2\times2\times\frac{1}{2}=2$

(2)　(1)と同様に　$\vec{c}\cdot\vec{d}=2$，$\vec{d}\cdot\vec{b}=2$

また，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\\&=\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)-\frac{1}{2}\vec{b}\\&=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{MN}|^2&=\left|-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right|^2\\&=\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2+\frac{1}{4}|\vec{d}|^2-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{d}\cdot\vec{b}\\&=\frac{1}{4}\times2^2+\frac{1}{4}\times2^2+\frac{1}{4}\times2^2-\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{2}\times2-\frac{1}{2}\times2=2\end{aligned}$$

したがって　$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{2}$

(3)　$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\cdot\vec{b}$

$=-\frac{1}{2}\times2^2+\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{2}\times2=0$

練習

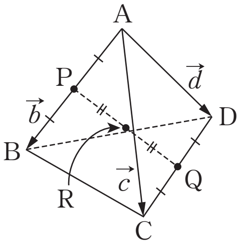
1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD がある。辺 AB，CD の中点をそれぞれ P，Q とし，線分 PQ の中点を R とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AR}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ。また，$\overrightarrow{AR}$ の大きさを求めよ。

(3) $\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BC}$ の値を求めよ。

(1) $\angle BAC=60°$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60°=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$



(2) (1)と同様に　$\vec{c}\cdot\vec{d}=\frac{1}{2}$，$\vec{d}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$

$$\overrightarrow{AR}=\frac{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\times\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}$$

$$|\overrightarrow{AR}|^2=\left|\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}\right|^2$$

$$=\frac{1}{16}|\vec{b}|^2+\frac{1}{16}|\vec{c}|^2+\frac{1}{16}|\vec{d}|^2+\frac{1}{8}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{8}\vec{c}\cdot\vec{d}+\frac{1}{8}\vec{d}\cdot\vec{b}$$

$$=\frac{1}{16}\times1^2+\frac{1}{16}\times1^2+\frac{1}{16}\times1^2+\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{16}$$

したがって　$|\overrightarrow{AR}|=\frac{\sqrt{6}}{4}$

(3) $\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

$$=\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2-\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{d}-\frac{1}{4}\vec{d}\cdot\vec{b}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times1^2+\frac{1}{4}\times1^2-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=0$$

PART3　共線条件

例題

(1)　空間の3点 A(3, 2, 6), B(5, −1, 4), C(x, y, 0) が一直線上にあるとき，x, y の値を求めよ。

(2)　平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を M，△BDE の重心を N とするとき，3点 C, N, M は一直線上にあることを示せ。

(1)　3点 A, B, C が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k が存在する。

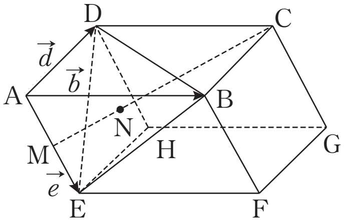
$$\overrightarrow{AB}=(2,\ -3,\ -2),\ \overrightarrow{AC}=(x-3,\ y-2,\ -6)$$

よって　$(x-3,\ y-2,\ -6)=k(2,\ -3,\ -2)$ であるから

$$x-3=2k,\ y-2=-3k,\ -6=-2k \cdots\cdots①$$

①より　$k=3$　　したがって　$x=9$, $y=-7$

(2)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とする。



$\overrightarrow{AN}=\dfrac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{d}+\dfrac{1}{3}\vec{e}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CN}&=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}\\&=\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}\right)-(\vec{b}+\vec{d})\\&=-\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}\\&=\frac{1}{3}(-2\vec{b}-2\vec{d}+\vec{e})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM}&=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}\\&=\frac{1}{2}\vec{e}-(\vec{b}+\vec{d})=-\vec{b}-\vec{d}+\frac{1}{2}\vec{e}\\&=\frac{1}{2}(-2\vec{b}-2\vec{d}+\vec{e})\end{aligned}$$

よって，$\overrightarrow{CM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CN}$ であるから，3点 C, N, M は一直線上にある。

練習

(1)　空間の 3 点 $A(a,\ -1,\ 5)$，$B(4,\ b,\ -7)$，$C(5,\ 5,\ -13)$ が一直線上にあるとき，a，b の値を求めよ。

(2)　平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を P，線分 PC を 1：2 に内分する点を Q とするとき，3 点 A，Q，G は一直線上にあることを示せ。

(1)　3 点 A，B，C が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k が存在する。

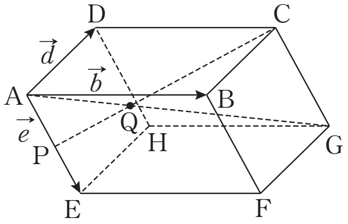
$$\overrightarrow{AB}=(4-a,\ b+1,\ -12),\ \ \overrightarrow{AC}=(5-a,\ 6,\ -18)$$

よって　$(5-a,\ 6,\ -18)=k(4-a,\ b+1,\ -12)$ であるから

$$5-a=k(4-a),\ \ 6=k(b+1),\ \ -18=-12k\ \cdots\cdots①$$

①より　$k=\dfrac{3}{2}$　　したがって　$a=2$，$b=3$

(2)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とする。



$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\vec{e}$$

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}}{1+2}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\vec{e}+\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d})=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}$$

$$=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$$

$$\overrightarrow{AG}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$$

よって　$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ であるから，3 点 A，Q，G は一直線上にある。

PART4　共面条件

例題

空間の4点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ -1)$，D$(1,\ 2,\ z)$ が同一平面上にあるとき，z の値を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 0,\ -1)$ より，3点 A，B，C は一直線上にない。

(解法1)

点Dが平面ABC上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(0,\ 2,\ z)$ に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

を満たす実数 s，t が存在する。よって

$$(0,\ 2,\ z)=s(-1,\ 2,\ 0)+t(-1,\ 0,\ -1)$$

したがって　$0=-s-t$，$2=2s$，$z=-t$

よって　$s=1$，$t=-1$

したがって $z=1$

(解法2)

原点をOとすると，点Dが平面ABC上にあるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad s+t+u=1$$

を満たす実数 s，t，u が存在する。よって

$$(1,\ 2,\ z)=s(1,\ 0,\ 0)+t(0,\ 2,\ 0)+u(0,\ 0,\ -1)$$

したがって　$1=s$，$2=2t$，$z=-u$

また　$s+t+u=1$

よって　$s=1$，$t=1$，$u=-1$

したがって　$z=1$

練習

空間の 4 点 $A(3,\ 1,\ 2)$，$B(4,\ 2,\ 3)$，$C(5,\ 2,\ 5)$，$D(-2,\ -1,\ z)$ が同一平面上にあるとき，z の値を求めよ。

$\overrightarrow{AB}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,\ 1,\ 3)$ より，3 点 A，B，C は一直線上にない。

（解法 1）

点 D が平面 ABC 上にあるとき，$\overrightarrow{AD}=(-5,\ -2,\ z-2)$ に対して

$$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

を満たす実数 s，t が存在する。よって

$$(-5,\ -2,\ z-2)=s(1,\ 1,\ 1)+t(2,\ 1,\ 3)$$

したがって　$-5=s+2t$，　$-2=s+t$，　$z-2=s+3t$

よって　$s=1$，$t=-3$

したがって　$z=-6$

（解法 2）

原点を O とすると，点 D が平面 ABC 上にあるとき

$$\overrightarrow{OD}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC},\quad s+t+u=1$$

を満たす実数 s，t，u が存在する。よって

$$(-2,\ -1,\ z)=s(3,\ 1,\ 2)+t(4,\ 2,\ 3)+u(5,\ 2,\ 5)$$

したがって　$-2=3s+4t+5u$，　$-1=s+2t+2u$，　$z=2s+3t+5u$

また　$s+t+u=1$

よって　$s=3$，$t=1$，$u=-3$

したがって　$z=-6$

第16講　空間図形の様々な問題，座標空間における図形

PART1　直線と平面の交点

例題

四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。辺ABを2：1に内分する点をPとし，線分CPを2：1に内分する点をQとする。次の問いに答えよ。

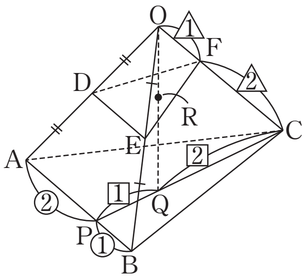
(1)　$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　辺OA, OBの中点をそれぞれD, E, 辺OCを1:2に内分する点をFとする。3点D, E，Fを含む平面と線分OQの交点をRとするとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OC}}{1+2}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

$=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$



(2)　点Rは直線OQ上の点であるから $\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OQ}$ (k は実数)と表される。

よって　$\overrightarrow{OR}=k\left(\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)=\dfrac{2}{9}k\vec{a}+\dfrac{4}{9}k\vec{b}+\dfrac{1}{3}k\vec{c}$ ……①

また，点Rは平面DEF上の点であるから，実数 s，t，u を用いて

$\overrightarrow{OR}=s\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OE}+u\overrightarrow{OF}$，$s+t+u=1$

と表される。ここで，$\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{3}\vec{c}$ であるから

$\overrightarrow{OR}=\dfrac{1}{2}s\vec{a}+\dfrac{1}{2}t\vec{b}+\dfrac{1}{3}u\vec{c}$ ……②

4点O，A，B，Cは同一平面上にないから，①，②より

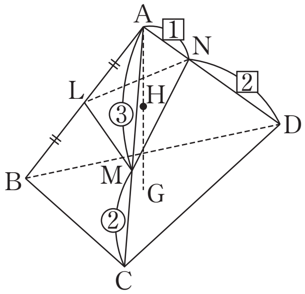
$\dfrac{2}{9}k=\dfrac{1}{2}s$，$\dfrac{4}{9}k=\dfrac{1}{2}t$，$\dfrac{1}{3}k=\dfrac{1}{3}u$　すなわち　$s=\dfrac{4}{9}k$，$t=\dfrac{8}{9}k$，$u=k$

これらと　$s+t+u=1$ より　$\dfrac{4}{9}k+\dfrac{8}{9}k+k=1$　　$k=\dfrac{3}{7}$

したがって，①より　$\overrightarrow{OR}=\dfrac{2}{21}\vec{a}+\dfrac{4}{21}\vec{b}+\dfrac{1}{7}\vec{c}$

練習

四面体 ABCD において，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。辺 AB の中点を L，辺 AC を 3：2 に内分する点を M，辺 AD を 1：2 に内分する点を N とする。また，三角形 BCD の重心を G とし, 3 点 L, M, N を含む平面と線分 AG の交点を H とする。このとき，$\overrightarrow{AH}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。



$$\overrightarrow{AG}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}$$

点 H は直線 AG 上の点であるから　$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AG}$ (k は実数)と表される。よって

$$\overrightarrow{AH}=k\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}\right)=\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{1}{3}k\vec{c}+\frac{1}{3}k\vec{d} \quad \cdots\cdots ①$$

また，点 H は平面 LMN 上の点であるから，実数 s，t，u を用いて

$$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AL}+t\overrightarrow{AM}+u\overrightarrow{AN},\ s+t+u=1$$

と表される。ここで，$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\vec{c}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\vec{d}$ であるから

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}s\vec{b}+\frac{3}{5}t\vec{c}+\frac{1}{3}u\vec{d} \quad \cdots\cdots ②$$

4 点 A，B，C，D は同一平面上にないから，①，②より

$$\frac{1}{3}k=\frac{1}{2}s,\ \frac{1}{3}k=\frac{3}{5}t,\ \frac{1}{3}k=\frac{1}{3}u \quad \text{すなわち} \quad s=\frac{2}{3}k,\ t=\frac{5}{9}k,\ u=k$$

これらと $s+t+u=1$ より　$\frac{2}{3}k+\frac{5}{9}k+k=1$　　$k=\frac{9}{20}$

したがって，①より　$\overrightarrow{AH}=\frac{3}{20}\vec{b}+\frac{3}{20}\vec{c}+\frac{3}{20}\vec{d}$

PART2　直線と平面の垂直

例題

四面体 OABC において，OA＝3，OB＝OC＝4，∠BOC＝∠COA＝∠AOB＝60° である。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，平面 ABC 上に点 H をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ と表すとき，s，t，u に成り立つ関係式を求めよ。

(3)　線分 OH と平面 ABC が垂直であるとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

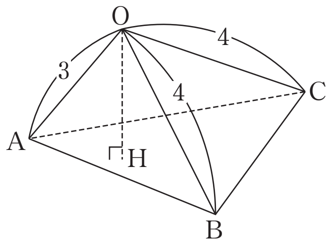
(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=3\times4\times\dfrac{1}{2}=6$,

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=4\times4\times\dfrac{1}{2}=8$,

$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos 60^\circ=4\times3\times\dfrac{1}{2}=6$

(2)　点 H は平面 ABC 上の点であるから　$s+t+u=1$ …… ①

(3)　OH ⊥ 平面 ABC より　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ より　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

よって　$-3s+10t+2u=0$ …… ②

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ より　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

$s\vec{c}\cdot\vec{a}-s|\vec{a}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u|\vec{c}|^2-u\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

よって　$-3s+2t+10u=0$ …… ③

①，②，③より　$s=\dfrac{2}{3}$，$t=\dfrac{1}{6}$，$u=\dfrac{1}{6}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$

練習

四面体OABCにおいて，OA＝2，OB＝OC＝1，∠AOB＝∠AOC＝60°，∠BOC＝90°である。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，平面ABC上に点Oから垂線OHを下ろしたとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

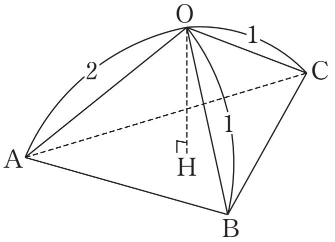
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=2\times1\times\dfrac{1}{2}=1$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos 60^\circ=1\times2\times\dfrac{1}{2}=1$

$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおくと，点Hは平面ABC上の点より

$s+t+u=1$ …… ①



OH⊥平面ABC　より　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$　より　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

よって　$3s+u=0$ …… ②

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ より $(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

$s\vec{c}\cdot\vec{a}-s|\vec{a}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u|\vec{c}|^2-u\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

よって　$3s+t=0$ …… ③

①，②，③より　$s=-\dfrac{1}{5}$，$t=\dfrac{3}{5}$，$u=\dfrac{3}{5}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=-\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

PART3　直線のベクトル方程式

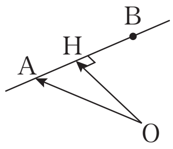
例題

2 点 A$(5,\ -2,\ -3)$, B$(8,\ 0,\ -4)$ を通る直線に，点 O から垂線 OH を下ろす。このとき，点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

点 H は直線 AB 上にあるから

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$（$t$ は実数）

と表せる。



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,\ 2,\ -1)$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(5,\ -2,\ -3)+t(3,\ 2,\ -1)=(5+3t,\ -2+2t,\ -3-t)$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$3(5+3t)+2(-2+2t)-(-3-t)=0$　　　$t=-1$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2,\ -4,\ -2)$

点 H の座標は $(2,\ -4,\ -2)$

$\mathrm{OH}=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

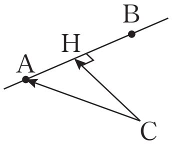
練習

2点 A$(1,\ 3,\ 0)$，B$(0,\ 4,\ -1)$ を通る直線に，点 C$(1,\ 5,\ -4)$ から垂線CHを下ろす。このとき，点Hの座標と線分CHの長さを求めよ。

点Hは直線AB上にあるから

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ （t は実数）

と表せる。



$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(0,\ -2,\ 4)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 1,\ -1)$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(0,\ -2,\ 4)+t(-1,\ 1,\ -1)=(-t,\ -2+t,\ 4-t)$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$-(-t)+(-2+t)-(4-t)=0$　　　$t=2$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(-2,\ 0,\ 2)$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(1,\ 5,\ -4)+(-2,\ 0,\ 2)=(-1,\ 5,\ -2)$

よって，点Hの座標は $(-1,\ 5,\ -2)$

$\mathrm{CH}=|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{(-2)^2+0^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

PART4　座標空間における図形

例題

中心の座標が $(1,\ 0,\ -3)$ で，点 $(3,\ 3,\ -1)$ を通る球面を S とする。

(1)　S の方程式を求めよ。

(2)　S と xy 平面の交わりは円である。この円の中心と半径を求めよ。

(3)　S と平面 $z=k$ の交わりが半径1の円になるとき，k の値を求めよ。

(1)　球面 S の半径を r とすると

$$r=\sqrt{(3-1)^2+(3-0)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{17}$$

よって，球面 S の方程式は　$(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=17$

(2)　球面 S が xy 平面，すなわち平面 $z=0$ と交わってできる円の方程式は

$$(x-1)^2+y^2+(0+3)^2=17,\quad z=0$$

つまり　$(x-1)^2+y^2=8,\ z=0$

よって，求める円の中心は点 $(1,\ 0,\ 0)$，半径は　$2\sqrt{2}$

(3)　球面 S が平面 $z=k$ と交わってできる円の方程式は

$$(x-1)^2+y^2+(k+3)^2=17,\quad z=k$$

つまり　$(x-1)^2+y^2=17-(k+3)^2,\ z=k$

半径の条件より　$17-(k+3)^2=1^2$　　$(k+3)^2=16$　　$k+3=\pm 4$

よって　$k=-7,\ 1$

練習

2 点 $A(1,\ 2,\ 4)$，$B(-5,\ 8,\ -2)$ を直径の両端とする球面を S とする。

(1)　S の方程式を求めよ。

(2)　S と yz 平面の交わりは円である。この円の中心と半径を求めよ。

(3)　S と平面 $y=k$ の交わりが半径 4 の円になるとき，k の値を求めよ。

(1)　球面 S の中心は，線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{1-5}{2},\ \frac{2+8}{2},\ \frac{4-2}{2}\right)\ \text{すなわち}\ (-2,\ 5,\ 1)$$

半径は　$\sqrt{(-2-1)^2+(5-2)^2+(1-4)^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

よって，球面 S の方程式は　$(x+2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=27$

(2)　球面 S が yz 平面，すなわち平面 $x=0$ と交わってできる円の方程式は

$$(0+2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=27,\ x=0$$

つまり　$(y-5)^2+(z-1)^2=23,\ x=0$

よって，求める円の中心は点 $(0,\ 5,\ 1)$，半径は　$\sqrt{23}$

(3)　球面 S が平面 $y=k$ と交わってできる円の方程式は

$$(x+2)^2+(k-5)^2+(z-1)^2=27,\ y=k$$

つまり　$(x+2)^2+(z-1)^2=27-(k-5)^2,\ y=k$

半径の条件より　$27-(k-5)^2=4^2$　　$(k-5)^2=11$　　$k-5=\pm\sqrt{11}$

よって　$k=5\pm\sqrt{11}$

確認問題　解答

第 1 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：5，イ：1，ウエ：49

[解説]

初項が 4，公差が 5 であるから

$a_n = 4+(n-1)\cdot 5$ [A]

$= \mathbf{5n-1}$

また，第 10 項は，

$a_{10} = 5\cdot 10-1$

$= \mathbf{49}$

[A]　初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は
$a_n = a+(n-1)d$

2 **[正解]** オカ：-4，キク：79，ケコ：-1

[解説]

初項が 75，公差が -4 であるから

$a_n = 75+(n-1)\cdot(-4)$ [B]

$= \mathbf{-4n+79}$

また，第 20 項は，

$a_{20} = -4\cdot 20+79$

$= \mathbf{-1}$

[B]　初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は
$a_n = a+(n-1)d$

3 [正解] サシ：-3，スセ：23，ソ：7

[解説]

初項を a，公差を d とおくと

$$a_n = a+(n-1)d$$

$a_4=11$ より　$a+3d=11$　……①　[C]

$a_{10}=-7$ より　$a+9d=-7$　……②

①，②より　$a=20$，$d=-3$

よって，一般項は

$$a_n = 20+(n-1)\cdot(-3)$$

$$= \boldsymbol{-3n+23}$$

また，$a_n=2$ より

$$-3n+23=2$$

$$n=7$$

よって，2 はこの数列の第 **7** 項である。

［C］　a と d の連立方程式をつくって解く。

第１講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-2，ウエ：22，オカ：20

[解説]

初項が 20，公差が -4 であるから，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot20+(n-1)\cdot(-4)\}$$ [A]

$$=\frac{n}{2}(-4n+44)$$

$$=\mathbf{-2n^2+22n}$$

また

$$S_{10}=-2\cdot10^2+22\cdot10$$

$$=-200+220=\mathbf{20}$$

[A]　初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和 S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

2 ［正解］キクケ：265

［解説］

等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot(-17)+(n-1)\cdot 3\}$$ [B]

$$=\frac{1}{2}n(3n-37)$$

求める和は $S_{20}-S_{10}$ である。[C]

$$S_{20}=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot(3\cdot 20-37)=230$$

$$S_{10}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(3\cdot 10-37)=-35$$

であるから

$$S_{20}-S_{10}=230-(-35)=\mathbf{265}$$

（別解）

等差数列の第 n 項を a_n とすると

$$a_n=-17+(n-1)\cdot 3=3n-20$$

$$a_{11}=3\cdot 11-20=13$$

$$a_{20}=3\cdot 20-20=40$$

求める和は，初項 $a_{11}=13$，末項 $a_{20}=40$，項数 $20-11+1=10$ の等差数列の和であるから [D]

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(13+40)=\mathbf{265}$$

［B］　まずは初項から第 n 項までの和を n の式で表す。

［C］　求める和は，$a_1+a_2+\cdots+a_{20}$ から $a_1+a_2+\cdots+a_{10}$ を引いたものである。

［D］　和 $a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}$ を a_{11} を初項とする等差数列の和とみて求める。

第 1 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：5，イウ：-3，エオカ：405

[解説]

初項が 5，公比が -3 の等比数列であるから

$$\boldsymbol{a_n = 5\cdot(-3)^{n-1}}$$ [A]

また，第 5 項は

$$a_5 = 5\cdot(-3)^4 = \mathbf{405}$$

[A]　初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は
$a_n = ar^{n-1}$

2

[正解] キク：96，ケ：2，コ：3，サシ：16

[解説]

初項が 96，公比が $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$\boldsymbol{a_n = 96\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$ [B]

また，第 10 項は

$$a_{10} = 96\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$= 2^5\cdot3\cdot\frac{1}{2^9}$$

$$= \frac{3}{2^4} = \mathbf{\frac{3}{16}}$$

[B]　初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は
$a_n = ar^{n-1}$

3 **[正解]** ス：2，セソ：-3

[解説]

初項を a，公比を r とおくと，$a_n = ar^{n-1}$

$a_3 = 18$ より　$ar^2 = 18$　……①　[C]

$a_5 = 162$ より　$ar^4 = 162$　……②

[C]　a と r の連立方程式をつくって解く。

②÷①より　$\dfrac{ar^4}{ar^2} = \dfrac{162}{18}$

$r^2 = 9$

$r < 0$ であるから　$r = -3$

このとき①より

$9a = 18$

$a = 2$

よって，一般項 a_n は　$\boldsymbol{a_n = 2\cdot(-3)^{n-1}}$

第 1 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：3

[解説]

初項が 8，公比が 3 であるから

$$S_n=\frac{8(3^n-1)}{3-1}$$ [A]

$$=4(3^n-1)$$

[A]　初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和 S_n は，
$r \neq 1$ のとき

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

2

[正解] ウ：5，エオ：−2

[解説]

初項が 15，公比が −2 であるから

$$S_n=\frac{15\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}$$ [B]

$$=5\{1-(-2)^n\}$$

[B]　公比 r が $r<1$ のときは，
$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ を使うと，分母が正になって計算しやすい。

3 **[正解]** カキク：315，ケコサ：128

[解説]

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{20\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot20\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$ [C]

$$=40-\frac{40}{2^n}$$

[C]　まずは初項から第 n 項までの和を n の式で表す。

求める和は

$$S_{10}-S_4=\left(40-\frac{40}{2^{10}}\right)-\left(40-\frac{40}{2^4}\right)$$ [D]

$$=-\frac{5}{2^7}+\frac{5}{2}$$

$$=\frac{5(2^6-1)}{2^7}=\mathbf{\frac{315}{128}}$$

[D]　求める和は，$a_1+a_2+\cdots+a_{10}$ から $a_1+a_2+a_3+a_4$ を引いたものである。

（別解）

等比数列の第 n 項を a_n とすると

$$a_n=20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_5=20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{4}$$

求める和は，初項 $\frac{5}{4}$，公比 $\frac{1}{2}$，項数 $10-5+1=6$ の等比数列の和であるから [E]

$$\frac{\frac{5}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot\frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{2^6}\right)$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{63}{64}$$

$$=\mathbf{\frac{315}{128}}$$

[E]　和 $a_5+a_6+\cdots+a_{10}$ を a_5 を初項とする等比数列の和とみて求める。

第２講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：7，イウ：10

[解説]

第４項までを列挙すると

$$\sum_{k=1}^{4}(3k-2)=(3\cdot1-2)+(3\cdot2-2)+(3\cdot3-2)+(3\cdot4-2) \quad \text{[A]}$$

$$=1+4+\mathbf{7}+\mathbf{10}$$

[A]　$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$

2

[正解] エ：5，オカキ：125

[解説]

第５項までを列挙すると

$$\sum_{k=1}^{5}5^{k-1}=5^0+5^1+5^2+5^3+5^4 \quad \text{[B]}$$

$$=1+\mathbf{5}+25+\mathbf{125}+625$$

[B]　$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$

3

[正解] ク：③

[解説]

$$3^2+4^2+5^2+\cdots+10^2 \quad \text{[C]}$$

$$=\sum_{k=3}^{10}k^2$$

[C]　数列 1^2，2^2，3^2，… の第 k 項が k^2 である。
この数列の第３項から第 10 項までの和である。

4

[正解] ケ：③

[解説]

数列 $1\cdot1$，$2\cdot3$，$3\cdot3^2$，……の第 k 項は $k\cdot3^{k-1}$ であるから

$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+(n+1)\cdot3^n \quad \text{[D]}$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}k\cdot3^{k-1}$$

[D]　数列 $1\cdot1$，$2\cdot3$，$3\cdot3^2$，……の初項から第 $(n+1)$ 項までの和である。

5 [正解] コサ：12，シ：5，ス：6

[解説]

$$\sum_{k=1}^{n} 2\cdot 6^k = 2\cdot 6 + 2\cdot 6^2 + 2\cdot 6^3 + \cdots\cdots + 2\cdot 6^n$$ [E]

$$= \frac{12(6^n - 1)}{6-1}$$

$$= \boldsymbol{\frac{12}{5}(6^n - 1)}$$

［E］　初項 12，公比 6，項数 n の等比数列の和である。

第２講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：2，イ：3

[解説]

$$\sum_{k=1}^{n}(4k-5)=4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}5 \quad \text{[A]}$$

$$=4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-5n \quad \text{[B]}$$

$$=2n^2-3n$$

$$=\boldsymbol{n(2n-3)}$$

[A]　$\sum$ を分けて表す。

[B]　$\sum_{k=1}^{n}c=cn$（c は定数）

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

（別解）

$$\sum_{k=1}^{n}(4k-5)=(-1)+3+7+\cdots\cdots+(4n-5) \quad \text{[C]}$$

$$=\frac{1}{2}n\{(-1)+(4n-5)\}$$

$$=\frac{1}{2}n(4n-6)$$

$$=\boldsymbol{n(2n-3)}$$

[C]　初項 -1，末項 $4n-5$，項数 n の等差数列の和である。

2 [正解] ウ：4，エ：1

[解説]

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-1)(k+2)=\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2+5k-2\right)$$

$$=3\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}2$$

$$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-2n$$ [D]

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)+\frac{5}{2}n(n+1)-2n$$

$$=\frac{1}{2}n\{(n+1)(2n+1)+5(n+1)-4\}$$

$$=\frac{1}{2}n\left(2n^2+8n+2\right)$$

$$=\boldsymbol{n\left(n^2+4n+1\right)}$$

[D] $\sum_{k=1}^{n}c=cn$（c は定数）

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

3 [正解] オ：4，カ：1，キ：2

[解説]

$$\sum_{k=1}^{n}k\left(k^2+1\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+\frac{1}{2}n(n+1)$$ [E]

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}n(n+1)\left(n^2+n+2\right)}$$

[E] $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

第 2 講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：6，イ：1，ウ：4，エ：1

[解説]

この数列の第 k 項を a_k とすると，

$a_k=k(2k-1)$ であるから，[A]

求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2-k\right)$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$$

[B]

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)}$$

[A]　まず，第 k 項を k を用いた式で表す。

[B]　$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

2 **[正解]** オ：4，カ：3，キ：2，ク：3

[解説]

この数列の第 k 項を a_k とすると

$$a_k=1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{k-1}$$

a_k は初項 1，公比 3，項数 k の等比数列の和であるから

$$a_k=\frac{1\cdot(3^k-1)}{3-1}=\frac{3^k-1}{2}$$ [C]

［C］　まず，第 k 項を k を用いた式で表す。

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}3^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}$$ [D]

［D］　$\sum_{k=1}^{n}3^k$ は，初項 3，公比 3，項数 n の等比数列の和である。

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(3^n-1)}{3-1}-\frac{1}{2}n$$

$$=\frac{1}{4}\{3(3^n-1)-2n\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)}$$

第 2 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：5，ウ：4

[解説]

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$\{a_n\}$：1　2　7　16　29　……

$\{b_n\}$：　1　5　9　13　……

よって，$\{b_n\}$ は，初項 1，公差 4 の等差数列であるから

$$b_n = 1+(n-1)\cdot 4 \quad \text{[A]}$$
$$= 4n-3$$

[A]　初項 a，公差 d の等差数列の一般項は
$a_n = a+(n-1)d$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad \text{[B]}$$
$$= 1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-3)$$
$$= 1+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-3(n-1)$$
$$= 2n^2-5n+4$$

[B]　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n \geqq 2$ のとき
$a_n = a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$

この式において，$n=1$ のとき，$2-5+4=1$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は $\boldsymbol{a_n = 2n^2-5n+4}$

2 **[正解]** エ：3，オ：2

[解説]

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$\{a_n\}$：3　5　11　29　83　……

$\{b_n\}$：　2　6　18　54　……

よって，$\{b_n\}$ は，初項 2，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n=2\cdot 3^{n-1}$$ [C]

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$=3+\sum_{k=1}^{n-1} 2\cdot 3^{k-1}$$ [D]

$$=3+\frac{2(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$=3^{n-1}+2$$

この式において，$n=1$ のとき，$3^0+2=3$ であり，これは a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は $\boldsymbol{a_n=3^{n-1}+2}$

[C]　初項 a，公比 r の等比数列の一般項は

$a_n=ar^{n-1}$

[D]　$\sum_{k=1}^{n-1} 2\cdot 3^{k-1}$ は，初項 2，公比 3 の等比数列の初項から第 $(n-1)$ 項までの和である。

第 3 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：4，イ：1

[解説]

$a_1=S_1=2\cdot1^2+3\cdot1=5$

また，$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\ \text{[A]}\\&=(2n^2+3n)-\{2(n-1)^2+3(n-1)\}\\&=(2n^2+3n)-(2n^2-n-1)\\&=4n+1\end{aligned}$$

この式で $n=1$ のとき，$4\cdot1+1=5$ となり，a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって $\boldsymbol{a_n=4n+1}$

[A]　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると
$a_1=S_1$
$n\geqq2$ のとき
$a_n=S_n-S_{n-1}$

2 **[正解]** ウ：5，エ：4，オ：5

[解説]

$a_1=S_1=5^1=5$

また，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}\ \text{[B]}$$
$$=5^n-5^{n-1}$$
$$=5\cdot 5^{n-1}-5^{n-1}$$
$$=(5-1)\cdot 5^{n-1}$$
$$=4\cdot 5^{n-1}$$

この式で $n=1$ のとき，$4\cdot 5^0=4$ となり，a_1 と一致しない。

よって，この式は $n=1$ のときには成り立たない。

したがって

$\boldsymbol{a_1=5}$

$n\geqq 2$ のとき $\boldsymbol{a_n=4\cdot 5^{n-1}}$

[B]　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると
$a_1=S_1$
$n\geqq 2$ のとき
$a_n=S_n-S_{n-1}$

第 3 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

この数列の第 k 項は

$$\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right) \quad \text{[A]}$$

よって，求める和は

$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\frac{1}{13\cdot17}+\cdots\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{17}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{17}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right\} \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{(4n+1)-1}{4n+1}=\boldsymbol{\frac{n}{4n+1}}$$

[A]　数列 1，5，9，13，…は初項 1，公差 4 の等差数列であり，第 m 項は $4m-3$ となる。

[B]　$\frac{1}{4}$ をくくり出すと，{　} の中の隣り合う項どうしで消し合い，最初の $\frac{1}{1}$ と最後の $-\frac{1}{4n+1}$ だけが残る。

第 3 講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：4，イ：1，ウ：5，エオ：16

[解説]

$$S=1\cdot5+2\cdot5^2+3\cdot5^3+\cdots\cdots+n\cdot5^n \quad \cdots\cdots①$$

①の両辺に 5 を掛けると

$$5S=1\cdot5^2+2\cdot5^3+3\cdot5^4+\cdots\cdots+(n-1)5^n+n\cdot5^{n+1} \quad \cdots②$$

①－②より [A]

$$-4S=1\cdot5+1\cdot5^2+1\cdot5^3+\cdots\cdots+1\cdot5^n-n\cdot5^{n+1}$$

$$=(5+5^2+5^3+\cdots\cdots+5^n)-n\cdot5^{n+1}$$

$$=\frac{5(5^n-1)}{5-1}-n\cdot5^{n+1}$$

$$=\frac{5^{n+1}-5-4n\cdot5^{n+1}}{4}$$

$$=\frac{(1-4n)\cdot5^{n+1}-5}{4}$$

よって　$\boldsymbol{S=\frac{(4n-1)\cdot5^{n+1}+5}{16}}$

[A]　（等差数列）×（等比数列）の和
一般項が（等差数列）×（等比数列）の形をした数列の和 S は，等比数列の公比 r を用いて $S-rS$ を計算することで求めることができる。

第３講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：2，ウ：3

[解説]

もとの数列の第 m 項は

$$1+(m-1)\cdot 4=4m-3$$

第１群から第 n 群までに含まれる数の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$ [A]

[A]　群の中の数の個数を加える。

よって，第 n 群の最後の数は，もとの数列の

第 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 項

したがって，第 n 群の最後の数は

$$4\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}-3=\mathbf{2n^2+2n-3}$$

2

[正解] エ：2，オ：2，カ：1

[解説]

$n\geqq 2$ のとき，第 $(n-1)$ 群の最後の数は，もとの数列の

第 $\frac{1}{2}(n-1)n$ 項

よって，第 n 群の最初の数は，もとの数列の

第 $\frac{1}{2}(n-1)n+1$ 項 [B]

[B]　第 n 群の最初の数が，もとの数列の第何項であるかを調べる。

であり，これは $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，第 n 群の最初の数は

$$4\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}-3=2(n-1)n+1$$

$$=\mathbf{2n^2-2n+1}$$

3 **[正解]** キ：2，ク：1

[解説]

第 n 群は，初項 $2n^2-2n+1$，末項 $2n^2+2n-3$，

項数 n の等差数列であるから，その総和は

$$\frac{1}{2}n\{(2n^2-2n+1)+(2n^2+2n-3)\}$$ [C]

$$=\frac{1}{2}n(4n^2-2)$$

$$=\boldsymbol{n(2n^2-1)}$$

[C]　初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)$$

第 4 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：6，ウエ：15

[解説]

$a_2=1+1^2=\mathbf{2}$ [A]

$a_3=2+2^2=\mathbf{6}$

$a_4=6+3^2=\mathbf{15}$

[A]　漸化式に $n=1,\ 2,\ 3$ を順に代入する。

2

[正解] オ：5，カ：2

[解説]

$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+5$ [B]

数列 $\{a_n\}$ は，初項 3，公差 5 の等差数列であるから

$a_n=3+(n-1)\cdot 5$ [C]

$=\mathbf{5n-2}$

[B]　$a_1=a,\ a_{n+1}=a_n+d$
$\Longleftrightarrow$ 初項 a，公差 d の等差数列

[C]　初項 a，公差 d の等差数列の一般項は
$a_n=a+(n-1)d$

3

[正解] キ：2，クケ：−3

[解説]

$a_1=2,\ a_{n+1}=-3a_n$ [D]

数列 $\{a_n\}$ は，初項 2，公比 −3 の等比数列であるから

$\boldsymbol{a_n=2\cdot(-3)^{n-1}}$ [E]

[D]　$a_1=a,\ a_{n+1}=ra_n$
$\Longleftrightarrow$ 初項 a，公比 r の等比数列

[E]　初項 a，公比 r の等比数列の一般項は
$a_n=ar^{n-1}$

第 4 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：1

[解説]

$a_1=4$，$a_{n+1}=a_n+2\cdot3^n$ [A]

$a_{n+1}-a_n=2\cdot3^n$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$b_n=2\cdot3^n$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \quad \text{[B]}$$

$$=4+\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot3^k$$

$$=4+\frac{6(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$=3^n+1$$

$a_1=4$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，一般項は $\boldsymbol{a_n=3^n+1}$

[A]　$a_{n+1}-a_n=2\cdot3^n$
$2\cdot3^n$ が階差数列の一般項になる。

[B]　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n\geqq2$ のとき
$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

2

[正解] ウ：5，エ：2，オ：3

[解説]

$a_{n+1}=2a_n+3$　……①　[C]

$\alpha=2\alpha+3$　……②

①－②より $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$

②より，$\alpha=-3$ であるから

$a_{n+1}+3=2(a_n+3)$

また $a_1+3=2+3=5$

よって，数列 $\{a_n+3\}$ は，初項 5，公比 2 の等比数列である。

$a_n+3=5\cdot2^{n-1}$

より，求める一般項は $\boldsymbol{a_n=5\cdot2^{n-1}-3}$

[C]　$a_{n+1}=pa_n+q$（$p\neq0$，$p\neq1$）の形の漸化式では，$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ の形に変形する。

第4講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：1，イ：1，ウ：1，エ：③，オ：7，
カ：6，キ：3

[解説]

[1]　$n=1$ のとき [A]

$(\text{左辺})=\mathbf{1}$，$(\text{右辺})=\mathbf{1}$

よって，$n=1$ のとき，(A)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A)が成り立つと仮定すると

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

$n=k+1$ のとき

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2$$ [B]

$$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\boldsymbol{(k+1)^2}$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(\boldsymbol{2k^2+7k+6})$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boldsymbol{2k+3})$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}$$

よって，$n=k+1$ のときにも(A)は成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，(A)が成り立つ。

[A]　数学的帰納法
ある命題が，すべての自然数 n について成り立つことを証明するには，次の2つのことを示す。
[1]　$n=1$ のとき成り立つ。
[2]　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときにも成り立つ。

[B]　(A)に $n=k+1$ を代入した等式が成り立つことを示す。

第4講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イウ：27，エオ：24，カ：④
キ：③，クケ：16，コ：8

[解説]

[1] $n=3$ のとき [A]

$(\text{左辺})=3^3=\mathbf{27}$，$(\text{右辺})=8\cdot 3=\mathbf{24}$

よって，$n=3$ のとき，(A)は成り立つ。

[2] $k\geqq 3$ として，$n=k$ のとき，(A)が成り立つと仮定すると

$3^k>8k$

$n=k+1$ のとき，(A)において

(左辺)－(右辺)を計算すると [B]

$$\begin{aligned}3^{k+1}-8(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})&=3\cdot 3^k-8(k+1)\\&>3\cdot 8\boldsymbol{k}-8(k+1)\\&=\mathbf{16}\boldsymbol{k}-8>0\end{aligned}$$

すなわち　$3^{k+1}>8(k+1)$

よって，$n=k+1$ のときにも(A)は成り立つ。

[1]，[2]より，3以上のすべての自然数 n について，(A)が成り立つ。

[A]　数学的帰納法
ある命題が，$n\geqq 3$ であるすべての自然数 n について成り立つことを証明するには，次の2つのことを示す。
[1]　$n=3$ のとき成り立つ。
[2]　$n=k$（$k\geqq 3$）のとき成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときにも成り立つ。

[B]　(A)に $n=k+1$ を代入した不等式が成り立つことを示す。

2 **[正解]** **サ**：9，**シス**：12，**セ**：3，**ソ**：3，**タ**：6，
チ：3，**ツ**：6，**テ**：3，**ト**：3

[解説]

$a_1 = 6$

$a_2 = 2a_1 - 3\cdot 1$ [C]

$= 2\cdot 6 - 3 = \mathbf{9}$

$a_3 = 2a_2 - 3\cdot 2$

$= 2\cdot 9 - 6 = \mathbf{12}$

よって，数列 $\{a_n\}$ の第3項までは，初項6，公差3の等差数列であるから

$a_n = 6 + (n-1)\cdot 3$ [D]

$a_n = \mathbf{3n+3}$ ……(A)

と推測される。これが正しいことを数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき [E]

$a_1 = \mathbf{6}$ となり，(A)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A)が成り立つと仮定すると

$a_k = 3k+3$

$n=k+1$ のとき，与えられた漸化式より

$a_{k+1} = 2a_k - 3k$

$= 2(3k+3) - 3k$

$= \mathbf{3k+6}$

$= \mathbf{3(k+1)+3}$

よって，$n=k+1$ のときにも(A)は成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，(A)が成り立つ。

したがって，求める一般項は

$a_n = 3n+3$

[C]　$a_{n+1} = 2a_n - 3n$ に $n=1$，$n=2$ を順に代入する。

[D]　初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は
$a_n = a + (n-1)d$

[E]　数学的帰納法
ある命題が，すべての自然数 n について成り立つことを証明するには，次の2つのことを示す。
[1]　$n=1$ のとき成り立つ。
[2]　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときにも成り立つ。

第 5 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：5，ウ：7，エ：9，オカ：11

[解説]

2 個のさいころの出る目を a，b とすると，出る目の最大値は次の表のようになる。

b \ a	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

よって，確率変数 X のとりうる値は

1，2，3，4，5，6

したがって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{\mathbf{3}}{36}$	$\frac{\mathbf{5}}{36}$	$\frac{\mathbf{7}}{36}$	$\frac{\mathbf{9}}{36}$	$\frac{\mathbf{11}}{36}$	1

[A]

[A]　確率分布
確率変数 X のとりうる値 x_1，x_2，……，x_n とそれぞれの値をとる確率 p_1，p_2，……，p_n の対応関係を，X の確率分布という。

X	x_1	x_2	…	x_n	計
P	p_1	p_2	…	p_n	1

$p_1 \geqq 0$，$p_2 \geqq 0$，……，$p_n \geqq 0$
$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$

2

[正解] キ：4，ク：9

[解説]

X の確率分布は以下の通り

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

したがって

$P(1\leqq X\leqq 4)$ [B]

$=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$

$=\dfrac{1}{36}+\dfrac{3}{36}+\dfrac{5}{36}+\dfrac{7}{36}$

$=\dfrac{16}{36}=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}$

[B]　確率変数 X について，
$X=a$ となる確率を $P(X=a)$，
$a\leqq X\leqq b$ となる確率を
$P(a\leqq X\leqq b)$ のように表す。

第 5 講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：6，ウ：1，エ：4，オ：5

[解説]

X のとりうる値は 0，1，2 である。

$$P(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{6}{10}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$$

よって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

ゆえに，X の期待値は

$$E(X)=0\cdot\frac{3}{10}+1\cdot\frac{6}{10}+2\cdot\frac{1}{10}$$

$$=\frac{1}{10}(0\cdot3+1\cdot6+2\cdot1)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$ [A]

[A]　確率変数の期待値（平均）
確率変数 X が下の表の確率分布に従うとき，期待値は
$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

第５講　PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：2，ウ：3，エ：4，オ：3，カ：2

[解説]

確率変数 X のとりうる値は 0，1，2，3 である。

$$P(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1)={}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

よって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

X の期待値は

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}$$ [A]

$$=\frac{12}{8}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

[A]　確率変数の期待値（平均）
確率変数 X が下の表の確率分布に従うとき，期待値は
$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$

X	x_1	x_2	…	x_n	計
P	p_1	p_2	…	p_n	1

X の分散は

$$V(X)$$

$$=\left(0-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{8}+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{8}+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{8}$$

$$+\left(3-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{8}$$ [B]

$$=\frac{9}{32}+\frac{3}{32}+\frac{3}{32}+\frac{9}{32}$$

$$=\frac{24}{32}=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

X の標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$ [C]

$$=\sqrt{\frac{3}{4}}=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

（別解）

$$E\left(X^2\right)=0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}$$

$$=\frac{24}{8}=3$$

よって

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2$$ [D]

$$=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$$

[B]　確率変数の分散

確率変数 X が下の表の確率分布に従うとき，X の期待値を $E(X)=m$ とすると，分散は

$$V(X)=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

[C]　確率変数の標準偏差

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

[D]　分散の公式

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2$$

第５講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：7，イウ：11，エオ：11

[解説]

$$E(X)=0\cdot\frac{20}{30}+1\cdot\frac{4}{30}+2\cdot\frac{3}{30}+3\cdot\frac{2}{30}+4\cdot\frac{1}{30}$$ [A]

$$=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$$

$$V(X)=\left(0^2\cdot\frac{20}{30}+1^2\cdot\frac{4}{30}+2^2\cdot\frac{3}{30}+3^2\cdot\frac{2}{30}+4^2\cdot\frac{1}{30}\right)-\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$=\frac{50}{30}-\frac{4}{9}=\frac{11}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{11}{9}}=\frac{\sqrt{11}}{3}$$

したがって

$$E(3X+5)=3E(X)+5$$ [B]

$$=3\cdot\frac{2}{3}+5=\mathbf{7}$$

$$V(3X+5)=3^2\,V(X)$$ [B]

$$=9\cdot\frac{11}{9}=\mathbf{11}$$

$$\sigma(3X+5)=|3|\sigma(X)$$ [B]

$$=3\cdot\frac{\sqrt{11}}{3}=\sqrt{\mathbf{11}}$$

（別解）

$$\sigma(3X+5)=\sqrt{V(3X+5)}$$

$$=\sqrt{\mathbf{11}}$$

[A]　まず X の期待値，分散，標準偏差を求める。

[B]　$aX+b$ の期待値，分散，標準偏差
確率変数 X と定数 a，b について
$E(aX+b)=aE(X)+b$
$V(aX+b)=a^2\,V(X)$
$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

2 **[正解]** カ：0，キク：44，ケ：2，コサ：11

[解説]

$$E(X)=\frac{2}{3},\quad V(X)=\frac{11}{9},\quad \sigma(X)=\frac{\sqrt{11}}{3}$$

であるから

$$E(-6X+4)=-6E(X)+4 \quad \text{[C]}$$
$$=-6\cdot\frac{2}{3}+4=\mathbf{0}$$

$$V(-6X+4)=(-6)^2\cdot V(X) \quad \text{[C]}$$
$$=36\cdot\frac{11}{9}=\mathbf{44}$$

$$\sigma(-6X+4)=|-6|\sigma(X) \quad \text{[C]}$$
$$=6\cdot\frac{\sqrt{11}}{3}=\mathbf{2\sqrt{11}}$$

（別解）

$$\sigma(-6X+4)=\sqrt{V(-6X+4)}$$
$$=\sqrt{44}$$
$$=\mathbf{2\sqrt{11}}$$

[C]　$aX+b$ の期待値，分散，標準偏差
確率変数 X と定数 a，b について
$E(aX+b)=aE(X)+b$
$V(aX+b)=a^2\,V(X)$
$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

第6講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：7

[解説]

1回目，2回目，3回目の出る目をそれぞれ X，Y，Z とすると，確率変数 X，Y，Z の確率分布は，いずれも次の表のようになる。

出る目	1	2	3	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

したがって

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{3}{6}$$

$$=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

同様に，$E(Y)=E(Z)=\frac{7}{3}$

よって，出る目の和の期待値は

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z) \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{7}{3}+\frac{7}{3}+\frac{7}{3}=\frac{21}{3}$$

$$=\mathbf{7}$$

[A]　確率変数の和の期待値
2つの確率変数 X，Y について
$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
3つの確率変数 X，Y，Z について
$E(X+Y+Z)$
$=E(X)+E(Y)+E(Z)$

2 **[正解]** イウ：21

[解説]

1回目，2回目，3回目の出る目をそれぞれ X，Y，Z とすると，

$$E(X)=E(Y)=E(Z)=\frac{7}{3}$$

である。

得られる合計点数は $2X+3Y+4Z$ であるから，合計点数の期待値は

$$E(2X+3Y+4Z)=2E(X)+3E(Y)+4E(Z)$$

[B]

$$=2\cdot\frac{7}{3}+3\cdot\frac{7}{3}+4\cdot\frac{7}{3}=\frac{63}{3}$$

$$=\mathbf{21}$$

［B］　確率変数 X，Y と定数 a，b について

$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

※３つ以上の確率変数においても同様のことが成り立つ。

第６講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：6

[解説]

確率変数 X，Y の確率分布は，次の表のようになる。

X	1	3	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Y	2	5	計
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2}=2$$

$$E(Y)=2\cdot\frac{2}{3}+5\cdot\frac{1}{3}=3$$

X，Y は独立であるから，XY の期待値は

$$E(XY)=E(X)E(Y)\ \text{[A]}$$
$$=2\cdot3=\mathbf{6}$$

[A]　独立な確率変数の積の期待値
確率変数 X，Y が互いに独立であるとき
$E(XY)=E(X)E(Y)$

2 [正解] イ：3

[解説]

確率変数 X，Y の確率分布は，次の表のようになる。

X	1	3	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Y	2	5	計
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

これより，$E(X)=2$，$E(Y)=3$　よって，

$$V(X)=(1-2)^2\cdot\frac{1}{2}+(3-2)^2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$V(Y)=(2-3)^2\cdot\frac{2}{3}+(5-3)^2\cdot\frac{1}{3}=2$$

X，Y は独立であるから，$X+Y$ の分散は

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y) \quad \text{[B]}$$
$$=1+2=\mathbf{3}$$

[B]　独立な確率変数の和の分散
確率変数 X，Y が互いに独立であるとき
$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

3 [正解] ウエ：41

[解説]

確率変数 X，Y の確率分布より，期待値は

$$E(X)=2,\ E(Y)=3$$

であるから

$$V(X)=1,\ V(Y)=2$$

X，Y は独立であるから，$3X+4Y$ の分散は

$$V(3X+4Y)=3^2V(X)+4^2V(Y) \quad \text{[C]}$$
$$=9\cdot1+16\cdot2=\mathbf{41}$$

[C]　確率変数 X，Y が互いに独立で，a，b が定数であるとき
$V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)$

第６講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

１回の試行で１または２の目が出る確率は

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

この試行を５回繰り返すから，X は二項分布 $B\left(5,\ \frac{1}{3}\right)$ に従う。[A]

[A]　１回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返す反復試行において，A の起こる回数を X とすると，X は確率変数で，二項分布 $B(n,\ p)$ に従う，という。

2

[正解] イウエ：232，オカキ：243

[解説]

$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_5\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{5-r}$$

$$(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$ [B]

であり，１または２の目が出る回数が３回以下であるので，$X\leqq 3$ のときである。

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P(X\leqq 3)&=1-\{P(X=4)+P(X=5)\} \quad\text{[C]}\\&=1-\left\{{}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0\right\}\\&=1-\left(\frac{10}{243}+\frac{1}{243}\right)\\&=1-\frac{11}{243}=\boldsymbol{\frac{232}{243}}\end{aligned}$$

[B]　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X について，$X=r$ となる確率は，反復試行の確率の式より

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r\,p^r(1-p)^{n-r}$$
$$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

[C]　$X\leqq 3$ となるのは，「$X=4$ または $X=5$」が起こらないときである。余事象を考えて確率を求める。

第 6 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：30，ウエ：20，オ：2，カ：5

[解説]

1 回の試行で赤球 2 個が出る確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$$

よって，X は二項分布 $B\left(90,\ \frac{1}{3}\right)$ に従う。

$$E(X)=90\cdot\frac{1}{3}=\mathbf{30}$$ [A]

$$V(X)=90\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=\mathbf{20}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{20}=\mathbf{2\sqrt{5}}$$

[A]　二項分布の期待値，分散，標準偏差
確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると
期待値　$E(X)=np$
分散　$V(X)=npq$
標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

2

[正解] キクケコ：1500，サシスセソ：50000

[解説]

受け取る金額の合計は $50X$ 円である。

$E(X)=30$ であるから，

$$E(50X)=50E(X)$$ [B]

$$=50\cdot30=1500$$

よって，受け取る金額の期待値は

1500 円

また，$V(X)=20$ であるから，

$$V(50X)=50^2\,V(X)$$ [C]

$$=2500\cdot20=50000$$

よって，受け取る金額の分散は

50000

[B]　確率変数 X と定数 a, b について
$E(aX+b)=aE(X)+b$

[C]　確率変数 X と定数 a, b について
$V(aX+b)=a^2\,V(X)$

第 7 講 PART1 確認問題 解答

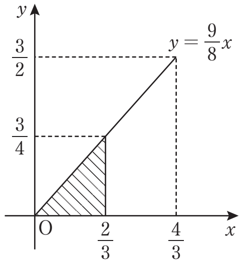
1

[正解] ア：1，イ：4

[解説]

$f(x)=\dfrac{9}{8}x$ より，

$f(0)=0$，$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{3}{4}$



$P\left(0\leqq X\leqq\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$ [A] [B]

[A] 確率密度関数と確率
連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とすると，$P(a\leqq X\leqq b)$ は曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積を表す。

$$P(a\leqq X\leqq b)=\int_a^b f(x)dx$$

[B] この問題では，定積分を使わなくても，図の三角形の面積を求めることで確率が求められる。

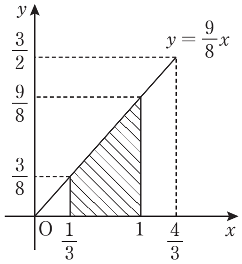
2

[正解] ウ：1，エ：2

[解説]

$f(x)=\dfrac{9}{8}x$ より，

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{3}{8}$，$f(1)=\dfrac{9}{8}$



$P\left(\dfrac{1}{3}\leqq X\leqq 1\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{8}+\dfrac{9}{8}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ [C]

[D]

[C] 確率密度関数と確率
連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とすると，$P(a\leqq X\leqq b)$ は曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積を表す。

$$P(a\leqq X\leqq b)=\int_a^b f(x)dx$$

[D] 図の台形の面積を求めればよい。

第 7 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] アイウエ：2369

[解説]

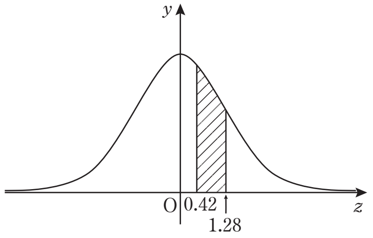
$P(0.42 \leqq Z \leqq 1.28)$ [A]

$= P(0 \leqq Z \leqq 1.28) - P(0 \leqq Z \leqq 0.42)$

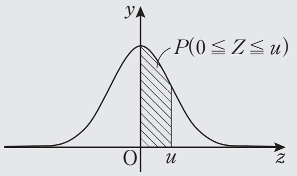
$= p(1.28) - p(0.42)$

$= 0.3997 - 0.1628$

$= \mathbf{0.2369}$



[A]　確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，確率 $P(0 \leqq Z \leqq u)$ は，下の図の斜線部分の面積に等しく，その値は正規分布表を用いて求めることができる。
分布曲線が $z=0$（y 軸）に関して対称であることに注目。



2

[正解] オカキク：0548

[解説]

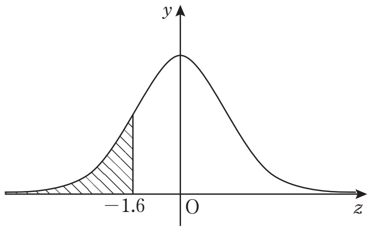
$P(Z \leqq -1.6) = P(Z \geqq 1.6)$ [B]

$= P(Z \geqq 0) - P(0 \leqq Z \leqq 1.6)$

$= 0.5 - p(1.6)$

$= 0.5 - 0.4452$

$= \mathbf{0.0548}$



[B]　分布曲線が y 軸に関して対称であるから，Z が 0 以上の部分で面積を考えてよい。

第7講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** アイ：11，ウ：5

[解説]

得点を X 点とすると，X は正規分布 $N\left(52,\ 15^2\right)$ に従う。

$Z=\dfrac{X-52}{15}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。[A]

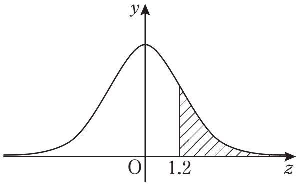
> [A]　確率変数の標準化
> 確率変数 X が正規分布 $N\left(m,\ \sigma^2\right)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=70$ のとき，$Z=\dfrac{70-52}{15}=1.2$

よって

$$
\begin{aligned}
P(X \geqq 70) &= P(Z \geqq 1.2)\\
&= 0.5-P(0 \leqq Z \leqq 1.2)\\
&= 0.5-p(1.2)\\
&= 0.5-0.3849\\
&= 0.1151
\end{aligned}
$$

したがって，得点が70点以上の生徒は約**11.5%**いる。



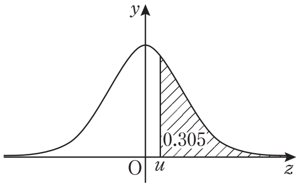
2 [正解] エオ：60

[解説]

得点を X 点とすると，X は正規分布 $N\left(52,\ 15^2\right)$ に従う。

$Z=\dfrac{X-52}{15}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。 [B]

ここで $P(Z \geqq u)=0.305$ となる u を求める。



$P(Z \geqq u)=0.5-P(0 \leqq Z \leqq u)$ より

$$0.5-P(0 \leqq Z \leqq u)=0.5-p(u)=0.305$$

$$p(u)=0.195$$

正規分布表より　$u=0.51$

よって，$Z \geqq 0.51$ より

$$\frac{X-52}{15} \geqq 0.51$$

$$X \geqq 59.65$$

したがって，得点が高い方から 30.5％に入るのは，

60 点以上の生徒である。

[B]　確率変数の標準化
確率変数 X が正規分布 $N\left(m,\ \sigma^2\right)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

第７講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** アイウエ：1056

[解説]

不良品の個数を X とすると，X は二項分布

$B(1600,\ 0.1)$ に従うから

$$E(X)=1600\cdot0.1=160 \quad \text{[A]}$$

$$V(X)=1600\cdot0.1\cdot0.9=144$$

$$\sigma(X)=\sqrt{144}=12$$

$n=1600$ は十分に大きいから，X は

正規分布 $N(160,\ 12^2)$ に従うとみなしてよい。[B]

ここで，$Z=\dfrac{X-160}{12}$ とおくと，Z は

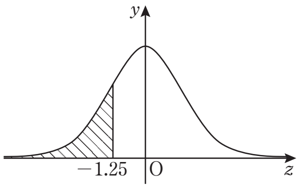
標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X\leqq145$ のとき，$Z\leqq\dfrac{145-160}{12}$ より

$$Z\leqq-1.25$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}P(X\leqq145)&=P(Z\leqq-1.25)\\&=P(Z\geqq1.25)\\&=0.5-P(0\leqq Z\leqq1.25)\\&=0.5-p(1.25)\\&=0.5-0.3944\\&=\mathbf{0.1056}\end{aligned}$$



[A]　確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると
$E(X)=np$，$V(X)=npq$，
$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

[B]　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき，正規分布 $N(np,\ npq)$ に従うとみなしてよい。ただし，$q=1-p$

2 [正解] オカキ：114

[解説]

1 の目が出る回数を X とすると，X は二項分布

$B\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$ に従うから

$$E(X)=720\cdot\frac{1}{6}=120$$

$$V(X)=720\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=100$$

$$\sigma(X)=\sqrt{100}=10$$

$n=720$ は十分に大きいから，X は

正規分布 $N(120,\ 10^2)$ に従うとみなしてよい。[C]

ここで，$Z=\frac{X-120}{10}$ とおくと，Z は

標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X\geqq k$ のとき，$Z\geqq\frac{k-120}{10}$ であるから，$P(X\geqq k)$

が 0.7 以上となるとき

$$P\left(Z\geqq\frac{k-120}{10}\right)\geqq0.5+0.2$$

よって　$P\left(\frac{k-120}{10}\leqq Z\leqq0\right)\geqq0.2$ [D]

すなわち　$P\left(0\leqq Z\leqq\frac{120-k}{10}\right)\geqq0.2$ より

$$p\left(\frac{120-k}{10}\right)\geqq0.2$$

正規分布表により

$$p(0.52)=0.1985,\quad p(0.53)=0.2019$$

であるから

$$\frac{120-k}{10}\geqq0.53$$

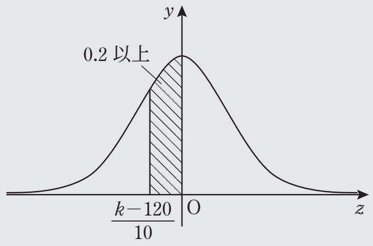
$$120-k\geqq5.3$$

$$k\leqq114.7$$

よって，求める k の最大値は　**114**

[C]　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき，正規分布 $N(np,\ npq)$ に従うとみなしてよい。ただし，$q=1-p$

[D]



第 8 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：2

[解説]

母集団から１枚のカードを抽出し，そのカードに書かれた数字を X とする。母集団分布は，次の表のようになる。 [A]

X	1	3	5	7	計
P	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

母平均 m は

$$m=1\cdot\frac{4}{10}+3\cdot\frac{3}{10}+5\cdot\frac{2}{10}+7\cdot\frac{1}{10}$$

$$=\frac{30}{10}=\mathbf{3}$$

母標準偏差 σ は

$$\sigma=\sqrt{\left(1^2\cdot\frac{4}{10}+3^2\cdot\frac{3}{10}+5^2\cdot\frac{2}{10}+7^2\cdot\frac{1}{10}\right)-3^2}$$

$$=\sqrt{4}=\mathbf{2}$$

[A]　母集団分布
母集団から１個の個体を無作為抽出したときの変量 x の値を X とするとき，X の確率分布を「母集団分布」という。
母平均　$m=E(X)$
母標準偏差　$\sigma=\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

2 **[正解]** ウ：3，エ：0，オ：4

[解説]

母平均 m は 3 であるから，$\overline{X}$ の期待値は

$$E(\overline{X})=m=\mathbf{3}$$ [B]

母標準偏差 σ は 2 であるから，$\overline{X}$ の標準偏差は

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{25}}=\frac{2}{5}=\mathbf{0.4}$$

[B]　標本平均の期待値，標準偏差
母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の
期待値　$E(\overline{X})=m$
標準偏差　$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

第 8 講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** アイウエ：6294

[解説]

$\overline{X}$ の分布は近似的に正規分布 $N\left(80,\ \dfrac{50^2}{100}\right)$,

すなわち正規分布 $N(80,\ 5^2)$ に従う。 [A]

$Z=\dfrac{\overline{X}-80}{5}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

ここで，$75 \leqq \overline{X} \leqq 84$ のとき

$$\frac{75-80}{5} \leqq \frac{\overline{X}-80}{5} \leqq \frac{84-80}{5}$$

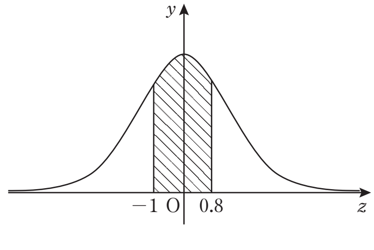
$$-1 \leqq Z \leqq 0.8$$

したがって

$$\begin{aligned}&P(75 \leqq \overline{X} \leqq 84)\\ &=P(-1 \leqq Z \leqq 0.8)\\ &=P(-1 \leqq Z \leqq 0)+P(0 \leqq Z \leqq 0.8)\\ &=P(0 \leqq Z \leqq 1)+P(0 \leqq Z \leqq 0.8)\\ &=p(1)+p(0.8)\\ &=0.3413+0.2881\\ &=0.6294\end{aligned}$$

よって，求める確率は

0.6294



[A]　標本平均の分布
母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の分布は，n が十分大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

2 [正解] オカキク：3085

[解説]

母比率は　$p=\dfrac{4}{10}=0.4$

標本の大きさは　$n=600$

よって，標本比率 R の分布は近似的に正規分布

$N\left(0.4,\ \dfrac{0.4\cdot 0.6}{600}\right)$，すなわち正規分布 $N(0.4,\ 0.02^2)$

に従う。[B]

$Z=\dfrac{R-0.4}{0.02}=50R-20$ とおくと，Z は

標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

ここで，$R\geqq\dfrac{246}{600}=\dfrac{41}{100}$ のとき

$$Z\geqq 50\cdot\frac{41}{100}-20$$

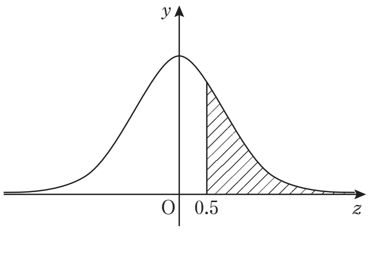
すなわち　$Z\geqq 0.5$

したがって

$$\begin{aligned}P\left(R\geqq\frac{246}{600}\right)&=P(Z\geqq 0.5)\\&=0.5-P(0\leqq Z\leqq 0.5)\\&=0.5-p(0.5)\\&=0.5-0.1915\\&=0.3085\end{aligned}$$

よって，求める確率は

0.3085



[B]　標本比率の分布
性質 A の母比率が p である母集団から無作為抽出された大きさ n の標本について，標本比率 R の分布は，n が十分大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(p,\ \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$ に従う。

第８講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：36，ウ：4，エオ：38，カ：4

[解説]

標本平均は　$\overline{X}=37.4$

標本の標準偏差は　$s=5.0$

標本の大きさは $n=100$ より

$$1.96\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=1.96\cdot\frac{5.0}{\sqrt{100}}=0.98$$

よって，母平均 m に対する信頼度 95％の信頼区間は

$$37.4-0.98\leqq m\leqq 37.4+0.98 \quad \text{[A]}$$

$$36.42\leqq m\leqq 38.38$$

すなわち

36.4 g 以上 38.4 g 以下

> [A]　母平均の推定
> 標本平均を $\overline{X}$ とする。母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，n が十分大きいならば，母平均 m に対する信頼度 95％の信頼区間は
> $$\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq \overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
> ※母標準偏差 σ がわからないときは，母標準偏差 σ のかわりに標本の標準偏差を用いてもよい。

2

[正解] キクケ：361，コサシ：439

[解説]

標本の大きさは　$n=600$

標本比率は　$R=\dfrac{240}{600}=0.4$

であるから

$$1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=1.96\cdot\sqrt{\frac{0.4\times 0.6}{600}}$$
$$=1.96\times 0.02=0.0392$$

よって，保有率 p に対する信頼度 95％の信頼区間は

$$0.4-0.0392\leqq p\leqq 0.4+0.0392 \quad \text{[B]}$$

$$0.3608\leqq p\leqq 0.4392$$

すなわち

$$\mathbf{0.361\leqq p\leqq 0.439}$$

> [B]　母比率の推定
> 母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，n が十分大きいならば，母比率 p に対する信頼度 95％の信頼区間は，標本比率を R とすると
> $$R-1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\leqq p \leqq R+1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$$

第8講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：②

[解説]

対立仮説 H_1 は「このさいころの6の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ ではない。」[A]

帰無仮説 H_0 は「このさいころの6の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ である。」

H_0 が正しいとするとき，このさいころを投げて6の目が出る回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=720\cdot\frac{1}{6}=120,\quad \sigma=\sqrt{720\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}=10$$

$n=720$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(120,\ 10^2)$ に従うとみなしてよい。

ここで $Z=\frac{X-120}{10}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$P(-1.96\leqq Z\leqq 1.96)\fallingdotseq 0.95$ であるから，有意水準5%の棄却域は

$$Z\leqq -1.96,\quad 1.96\leqq Z$$ [B]

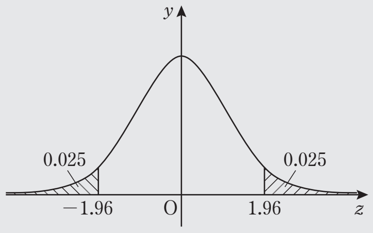
$X=102$ のとき，$Z=-1.8$ であるから，この値は棄却域に入らない。

よって，帰無仮説 H_0 は棄却できない。

したがって，**このさいころの6の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ ではないとは判断できない。**

[A]　仮説検定
仮説検定の主な流れは以下
① 主張したい仮説 H_1（対立仮説）に反する仮説 H_0（帰無仮説）を立てる。
② 有意水準に従い，H_0 のもとで棄却域を求める。
③ H_0 のもとで，標本調査の結果またはそれ以上に極端な結果が得られる確率を求める。
④ ③の結果が
棄却域に入る場合
→ H_0 を棄却できる。
よって，H_1 が正しいと判断できる。
棄却域に入らない場合
→ H_0 を棄却できない。
よって，H_1 が正しいとは判断できない。

[B]



2 ［正解］イ：①

［解説］

対立仮説 H_1 は

「このさいころは６の目が出にくい。」[C]

帰無仮説 H_0 は

「このさいころの６の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ である。」

H_0 が正しいとするとき，このさいころを投げて６の目が出る回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=720\cdot\frac{1}{6}=120$$

$$\sigma=\sqrt{720\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}=10$$

$n=720$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(120,\ 10^2)$ に従うとみなしてよい。

ここで $Z=\frac{X-120}{10}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$P(-1.64\leqq Z\leqq 0)=P(0\leqq Z\leqq 1.64)\fallingdotseq 0.45$ であるから，有意水準 5%の棄却域は

$$Z\leqq -1.64$$ [D]

$X=102$ のとき，$Z=-1.8$ であるから，この値は棄却域に入る。

よって，帰無仮説 H_0 は棄却できる。

したがって，**このさいころは６の目が出にくいと判断できる。**

［C］　仮説検定

仮説検定の主な流れは以下

① 主張したい仮説 H_1（対立仮説）に反する仮説 H_0（帰無仮説）を立てる。

② 有意水準に従い，H_0 のもとで棄却域を求める。

③ H_0 のもとで，標本調査の結果またはそれ以上に極端な結果が得られる確率を求める。

④ ③の結果が

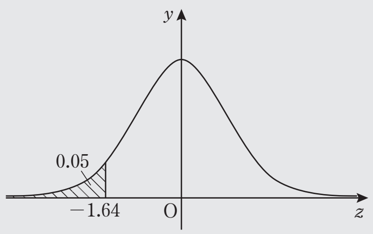
棄却域に入る場合

→ H_0 を棄却できる。
よって，H_1 が正しいと判断できる。

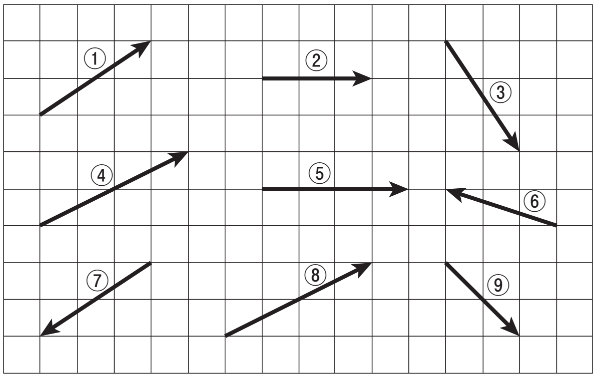
棄却域に入らない場合

→ H_0 を棄却できない。
よって，H_1 が正しいとは判断できない。

［D］



第 9 講　PART1 確認問題 解答



1　**[正解]** ア：③，イ：⑦，ウ：④，エ：⑧

[解説]

大きさが等しいベクトルは，[A]

①と③と⑦，④と⑧

[A]　向きは関係なく，有向線分の長さが等しいものを考える。

2　**[正解]** オ：⑤，カ：④，キ：⑧

[解説]

向きが等しいベクトルは，[B]

②と⑤，④と⑧

[B]　大きさは関係なく，向きだけを考える。

3　**[正解]** ク：④，ケ：⑧

[解説]

等しいベクトルは，[C]

④と⑧

[C]　向きが同じで，大きさも等しいベクトル
$\vec{a}=\vec{b}$

4　**[正解]** コ：①，サ：⑦

[解説]

逆ベクトルは，向きが反対で，大きさが等しいものであるから，[D]

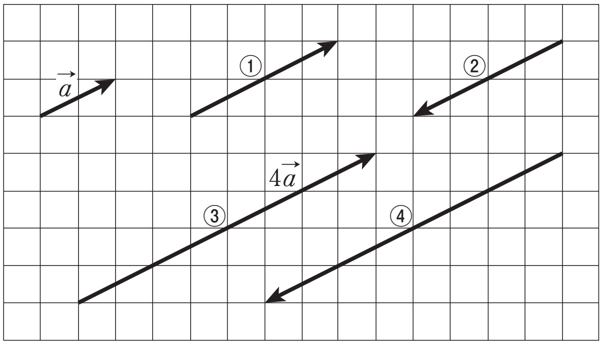
①と⑦

[D]　向きが反対で，大きさが等しいベクトル
$\vec{a}=-\vec{b}$, $\vec{b}=-\vec{a}$

第 9 講　PART2 確認問題 解答

1　[正解] ア：③

[解説]

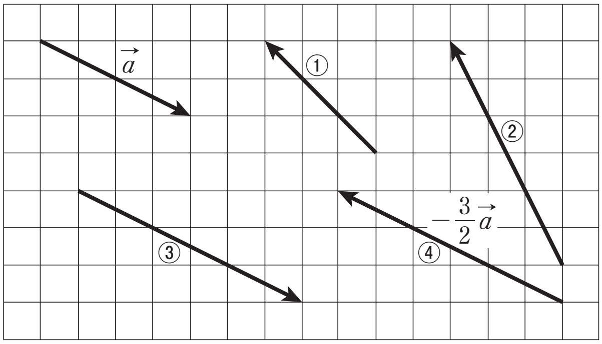


[A]

[A]　$\vec{a} \neq \vec{0}$ とする。
（i）$k>0$ のとき
$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と向きが同じで，大きさが k 倍のベクトル
（ii）$k<0$ のとき
$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と向きが反対で，大きさが $|k|$ 倍のベクトル

2　[正解] イ：④

[解説]

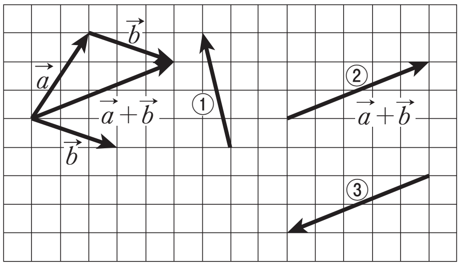


[B]

[B]　$\vec{a} \neq \vec{0}$ とする。
（i）$k>0$ のとき
$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と向きが同じで，大きさが k 倍のベクトル
（ii）$k<0$ のとき
$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と向きが反対で，大きさが $|k|$ 倍のベクトル

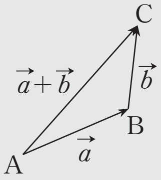
3 ［正解］ウ：②

［解説］



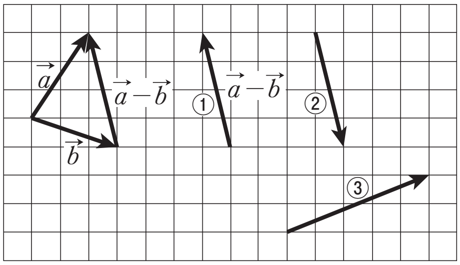
［C］

［C］　$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ とすると，
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



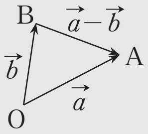
4 ［正解］エ：①

［解説］



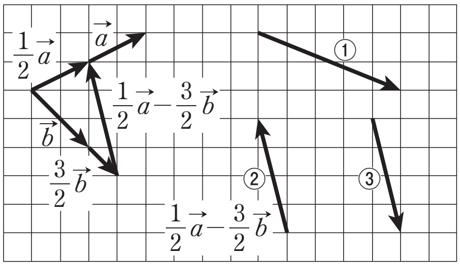
［D］

［D］　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると，
$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$



5 ［正解］オ：②

［解説］



［E］

［E］　$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$ は $\frac{1}{2}\vec{a}$ と $\frac{3}{2}\vec{b}$ を図示し，これらの差を求める。

第９講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：7，ウ：2，エ：7，オ：3，カ：7，キ：1，ク：7

[解説]

$\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}$　……①

$3\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}$　……②

とする。

① ＋ ②×2 より **[A]**

$7\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}$

$\vec{x}=\dfrac{1}{7}\vec{a}+\dfrac{2}{7}\vec{b}$

このとき，②より

$\vec{y}=3\vec{x}-\vec{b}=3\left(\dfrac{1}{7}\vec{a}+\dfrac{2}{7}\vec{b}\right)-\vec{b}$

$=\dfrac{3}{7}\vec{a}-\dfrac{1}{7}\vec{b}$

［A］　ベクトルの演算
ベクトルの性質から，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の式を，文字 a，b の式と同じように扱うことができる。

2

[正解] ケ：1，コ：3

[解説]

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$ であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と同じ向きの単位ベクトルは，**[B]**

$\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$

［B］　単位ベクトルとは，大きさが 1 のベクトルである。
$\vec{p}$ と同じ向きの単位ベクトルは，
$\dfrac{1}{|\vec{p}|}\vec{p}$

3 **[正解]** サシ：-1，ス：5，セ：1，ソ：5，
タ：1，チ：5，ツ：1，テ：5

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{b}-\vec{a}$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と平行な単位ベクトルのうち，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と同じ向きのものは [C]

$$\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{5}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\vec{\boldsymbol{a}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\vec{\boldsymbol{b}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と反対の向きのものは

$$-\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\frac{1}{5}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\vec{\boldsymbol{a}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\vec{\boldsymbol{b}}$$

[C]　ベクトルの平行
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき
$\vec{a}\,/\!/\,\vec{p}$ $\Longleftrightarrow$
$\vec{p}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する
$\vec{a}$ と平行なベクトル $\vec{p}$ は，$\vec{a}$ を用いて表すことができる。

第 9 講　PART4 確認問題 解答

1

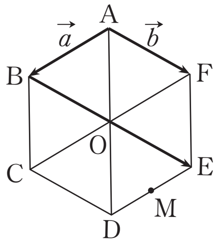
[正解] ア：①

[解説]

$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BO}$

$=2\overrightarrow{AF}$ [A]

$=2\vec{b}$



［A］　四角形 ABOF は平行四辺形だから，$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AF}$

2

[正解] イ：⑤

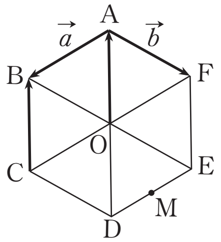
[解説]

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}$ [B]

$=-\overrightarrow{AO}$

$=-(\vec{a}+\vec{b})$

$=-\vec{a}-\vec{b}$



［B］　四角形 ABCO は平行四辺形だから，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}$

3

[正解] ウ：④

[解説]

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OE}$ [C]

$=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$

$=-\vec{a}+\vec{b}$

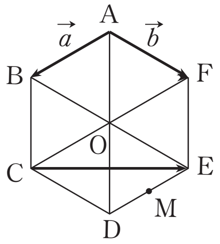
（別解）

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BF}$

$=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}$ [C]

$=\vec{b}-\vec{a}$

$=-\vec{a}+\vec{b}$



［C］　2 つのベクトルの和や差を用いて

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$,

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

のようにベクトルを「分割」して表すことができる。

4 [正解] エ：⑧

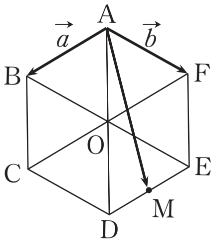
[解説]

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}$ [D]

$=2\overrightarrow{AO}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DE}$

$=2(\vec{a}+\vec{b})+\dfrac{1}{2}(-\vec{a})$

$=\dfrac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$



[D]　2つのベクトルの和や差を用いて
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$,
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
のようにベクトルを「分割」して表すことができる。

5 [正解] オ：⑦

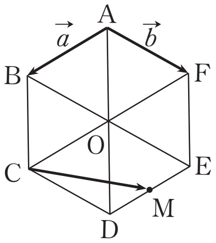
[解説]

$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DM}$ [E]

$=\overrightarrow{AF}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DE}$

$=\vec{b}+\dfrac{1}{2}(-\vec{a})$

$=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$



[E]　2つのベクトルの和や差を用いて
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$,
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
のようにベクトルを「分割」して表すことができる。

第10講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：8，イ：4，ウ：4，エ：5

[解説]

$$2\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}=2(1,\ 3)-\frac{2}{3}(-9,\ 3)$$ [A]

$$=(8,\ 4)$$

$$\left|2\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\right|=\sqrt{8^2+4^2}$$ [B]

$$=\mathbf{4\sqrt{5}}$$

（別解）

$$2\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}=(8,\ 4)=4(2,\ 1)$$

これより

$$\left|2a-\frac{2}{3}\vec{b}\right|=4\sqrt{2^2+1^2}=\mathbf{4\sqrt{5}}$$

[A]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，
$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$
$k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$　（k は実数）

[B]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ において，
$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

2 **[正解]** オ：2，カ：1，キ：4，ク：3，ケコ：20，
サシ：20，スセ：10

[解説]

$$\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 3)+t(-2,\ 4)$$ [C]

$$=(1-2t,\ 3+4t)$$

$$=(\mathbf{-2t+1,\ 4t+3})$$

$$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(-2t+1)^2+(4t+3)^2}$$ [D]

$$=\sqrt{\mathbf{20t^2+20t+10}}$$

[C]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき
$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$
$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$
$k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$（k は実数）

[D]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ において，
$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

第10講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：3，イ：5，ウ：4，エ：5

[解説]

$$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは，

$$\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{1}{5}(3,\ 4)$$ [A]

$$=\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

[A]　$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは，
$\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$

2 [正解] オ：5，カ：4

[解説]

$\vec{a}+\vec{b}=(4,\ -5)+(-1,\ x)$

$=(3,\ x-5)$

$\vec{a}+2\vec{b}=(4,\ -5)+2(-1,\ x)$

$=(2,\ 2x-5)$

$\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}+2\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}+\vec{b}$ と

$\vec{a}+2\vec{b}$ が平行になるのは，

$\vec{a}+2\vec{b}=k(\vec{a}+\vec{b})$ となる実数 k が存在するときで

ある。[B]

$(2,\ 2x-5)=k(3,\ x-5)$ より

$2=3k$ ……①

$2x-5=k(x-5)$ ……②

①より　$k=\dfrac{2}{3}$

このとき，②より　$2x-5=\dfrac{2}{3}(x-5)$

$6x-15=2x-10$

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{5}{4}}$

（別解）

$\vec{a}+\vec{b}=(3,\ x-5)$

$\vec{a}+2\vec{b}=(2,\ 2x-5)$

$(\vec{a}+\vec{b})\parallel(\vec{a}+2\vec{b})$ より

$3\times(2x-5)-(x-5)\times2=0$ [C]

$6x-15-2x+10=0$

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{5}{4}}$

> [B]
> $\vec{a}\parallel\vec{b}\iff$
> $\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する

> [C]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，
> $\vec{a}\parallel\vec{b}\iff a_1b_2-a_2b_1=0$

第10講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：3

[解説]

$\mathrm{BH}=1$，$\mathrm{AH}=\mathrm{CH}=\sqrt{3}$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ のなす角は 30° であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AH}}|\cos 30^\circ$$ [A]

$$=2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=3$$

[A]　2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

2

[正解] イウ：-3

[解説]

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HA}}$ のなす角は [B]

$$180^\circ-45^\circ=135^\circ$$

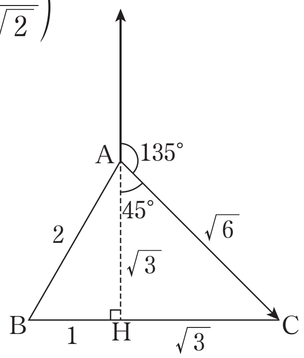
であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}}$$

$$=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{HA}}|\cos 135^\circ$$ [C]

$$=\sqrt{6}\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=-3$$



[B]　2つのベクトルの始点をそろえてなす角を考える。

[C]　2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

3 [正解] エ：0

[解説]

$\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AH}$ であるから，

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$$ [D]

[D]　$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき，
$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

4 [正解] オ：3

[解説]

$\overrightarrow{CH}$ と $\overrightarrow{HB}$ のなす角は $0°$ であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HB} &= |\overrightarrow{CH}||\overrightarrow{HB}|\cos 0° \\ &= \sqrt{3} \times 1 \times 1 \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$ [E]

[E]　2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

第10講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：17，ウエ：45

[解説]

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-3)+4\times5$ [A]

$=\mathbf{17}$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ [B]

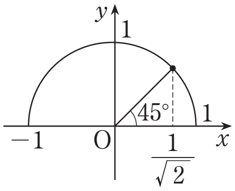
$=\dfrac{17}{\sqrt{1^2+4^2}\sqrt{(-3)^2+5^2}}$

$=\dfrac{17}{\sqrt{17}\sqrt{34}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ の範囲で

これを満たす θ は

$\boldsymbol{\theta=45^\circ}$



[A]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

[B]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，２つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると，
$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
$=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$

2

[正解] オ：9

[解説]

$\vec{a}\perp\vec{b}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ [C]

よって

$2\times x+3\times(-6)=0$

$\boldsymbol{x=9}$

[C]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，
$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
$\iff a_1b_1+a_2b_2=0$

3 **[正解]** カキ：-1，ク：3

[解説]

$$\vec{x}+\vec{a}=(-4,\ t)+(3,\ 2)$$
$$=(-1,\ t+2)$$
$$\vec{x}-\vec{b}=(-4,\ t)-(1,\ 4)$$
$$=(-5,\ t-4)$$

$\vec{x}+\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直のとき

$$(\vec{x}+\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$$ [D]

よって

$$(-1)\times(-5)+(t+2)(t-4)=0$$
$$t^2-2t-3=0$$
$$(t+1)(t-3)=0$$
$$\boldsymbol{t=-1,\ 3}$$

[D]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，
$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$
$\iff a_1b_1+a_2b_2=0$

第11講　PART1 確認問題 解答

1 [正解] ア：③

[解説]

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}$$ [A]

$$=|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$=\boldsymbol{|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}}$$

[A]　内積の計算は，文字式の展開と同じように行うことができる。

2 [正解] イ：④

[解説]

$$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$$ [B]

$$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot(2\vec{b})-(2\vec{b})\cdot\vec{a}+(2\vec{b})\cdot(2\vec{b})$$

$$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$$

$$=\boldsymbol{|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}$$

[B]

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

（k は実数）

3 [正解] ウエ：37

[解説]

$$|3\vec{a}+2\vec{b}|^2=(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}+2\vec{b})$$ [C]

$$=9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$$

$$=9\times1^2+12\times(-3)+4\times4^2$$

$$=9-36+64$$

$$=37$$

$|3\vec{a}+2\vec{b}|\geqq0$ より，

$$|3\vec{a}+2\vec{b}|=\boldsymbol{\sqrt{37}}$$

[C]

$s\vec{a}+t\vec{b}$（s，t は実数）の形で表されたベクトルの大きさ $|s\vec{a}+t\vec{b}|$ について

$|s\vec{a}+t\vec{b}|^2=(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})$

のように，2 乗すると「内積」として演算を行うことができる。

第 11 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：2，ウ：3

[解説]

$|\vec{a}-2\vec{b}|=3$ の両辺を 2 乗すると [A]

$$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=9$$

$$|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=9$$ [B]

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$ より

$$3^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times2^2=9$$

$$25-4\vec{a}\cdot\vec{b}=9$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$ [C]

$$=\frac{4}{3\times2}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

[A]　$|\vec{a}-2\vec{b}|=3$ の両辺を 2 乗し，$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表す。

[B]
$|s\vec{a}+t\vec{b}|^2=s^2|\vec{a}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$
（s，t は実数）

[C]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

2 [正解] エ：2，オカ：60

[解説]

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-6\vec{b}$ が垂直であるから

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-6\vec{b})=0$$ [D]

$$|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-6|\vec{b}|^2=0$$

$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=1$ より

$$4^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-6\times1^2=0$$

$$16-5\vec{a}\cdot\vec{b}-6=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{2}$$

よって

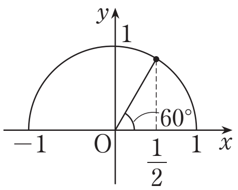
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$ [E]

$$=\frac{2}{4\times1}=\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ の範囲で

これを満たす θ は

$$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$$



[D]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，
$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

[E]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，
$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

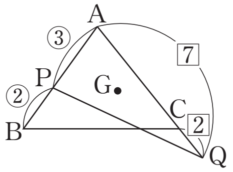
第11講　PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：5，ウ：3，エ：5

[解説]

線分 AB を 3：2 に内分する点が $P(\vec{p})$ であるから

$$\vec{p}=\frac{2\times\vec{a}+3\times\vec{b}}{3+2}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$$ [A]



[A]　2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とすると，

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

2 **[正解]** オ：2，カ：5，キ：7，ク：5

[解説]

線分 AC を 7：2 に外分する点が $Q(\vec{q})$ であるから

$$\vec{q}=\frac{-2\times\vec{a}+7\times\vec{c}}{7-2}=-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{7}{5}\vec{c}$$ [B]

[B]　2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトルを $\vec{q}$ とすると，

$$\vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

3 **[正解]** ケ：1，コ：3，サ：1，シ：5，ス：7，

セソ：15

[解説]

$\vec{p}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$，$\vec{q}=-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{7}{5}\vec{c}$ であり，

点 $G(\vec{g})$ は △APQ の重心であるから，

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{p}+\vec{q}}{3}$$ [C]

$$=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{7}{5}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{7}{5}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{7}{15}\vec{c}$$

[C]　3 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ を頂点とする △ABC の重心 G の位置ベクトルを $\vec{g}$ とすると，

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

第11講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：4，ウ：1，エ：2，オ：1，
カ：2，キ：3，ク：2

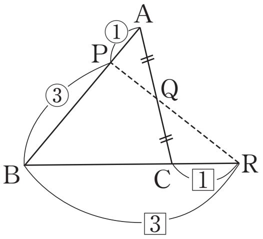
[解説]

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\vec{b}$

$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{AR}=\frac{-1\times\vec{b}+3\times\vec{c}}{3-1}$ [A]

$=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$



[A]　2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトルを $\vec{q}$ とすると，

$\vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$

2

[正解] ケコ：−1，サ：4，シ：1，ス：2，
セソ：−3，タ：4，チ：3，ツ：2

[解説]

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}$ [B]

$=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{b}=-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}$

$=\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}\right)-\frac{1}{4}\vec{b}$

$=-\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$

[B]　$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表す。

3 **[正解]** テ：1，ト：4，ナ：2，ニ：3，ヌ：4，ネ：2，
ノ：3，ハ：1，ヒ：2

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$=\frac{1}{4}(-\vec{b}+2\vec{c})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=-\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$$

$$=\frac{3}{4}(-\vec{b}+2\vec{c})$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=3\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$ [C]

よって，3 点 P，Q，R は一直線上にある。

また，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ であるから，

$$\mathrm{PQ}:\mathrm{PR}=1:3$$

よって，PQ：QR＝**1：2**

[C]　3 点 P，Q，R が一直線上にある
$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を満たす実数 k
が存在する

第12講　PART1 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：3，イ：2，ウ：5，エ：1

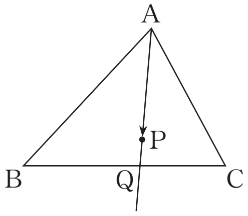
[解説]

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{2}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{6}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{5}{6}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right)$$

……①　[A]　[B]



$\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ は，点 A を始点とし，線分 BC を 3：2 に内分する点の位置ベクトルである。また，3 点 A，P，Q は一直線上にあり，点 Q は直線 BC 上にあることから

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\quad\cdots\cdots②$$

となり

BQ：QC＝3：2

①，②より

$$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$$　[C]

よって，AP：AQ＝5：6 であるから，

AP：PQ＝5：1

（別解）

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$（$k$ は実数）とおくと

$$\overrightarrow{AQ}=k\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{k}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{2}\overrightarrow{AC}$$

点 Q は直線 BC 上の点であるから

$$\frac{k}{3}+\frac{k}{2}=1$$　[D]

$$k=\frac{6}{5}$$

[A]　2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) に対し，線分 AB を $m:n$ に内分する点を P($\vec{p}$) とすると，$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

[B]　3 点 A，B，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とするとき，

$$\vec{p}=k\left(\frac{n}{m+n}\vec{a}+\frac{m}{m+n}\vec{b}\right)$$

└ 和が 1 ┘

の形の式から，点 P の位置を線分 AB を内分または外分する点を用いて表すことができる。

[C]　$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AQ}$ の式で表す。

[D]　点 P が直線 AB 上の点 $\Longleftrightarrow \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$

よって，$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ であるから

BQ：QC＝3：2

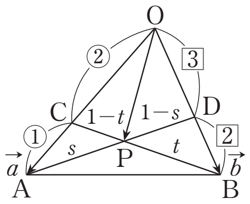
$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{6}{5}\overrightarrow{AP}$ より　**AP：PQ＝5：1**

第 12 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：5，ウ：2，エ：3，オ：⑥，
カ：②，キ：4，ク：9，ケ：1，コ：3

[解説]



AP：PD＝s：$(1-s)$ とすると [A]

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD} \quad \text{[B]}$$

$$=(1-s)\vec{a}+\frac{3}{5}s\vec{b} \quad \cdots\cdots ①$$

BP：PC＝t：$(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC} \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{2}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b} \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$(1-s)\vec{a}+\frac{3}{5}s\vec{b}=\frac{2}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であり，平行でないから，

$$1-s=\frac{2}{3}t,\quad \frac{3}{5}s=1-t \quad \text{[C]}$$

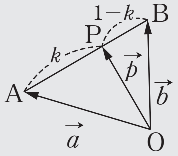
これを解いて　$s=\dfrac{5}{9}$，$t=\dfrac{2}{3}$

$s=\dfrac{5}{9}$ を①に代入して，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

[A]　AP：PD，BP：PC を文字でおいて，$\overrightarrow{OP}$ を 2 通りの式で表す。

[B]　線分 AB を内分する点 P について，3 点 A，B，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とすると，
$\vec{p}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$ $(0<k<1)$
と表される。



[C]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，
$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$
$\Longleftrightarrow s=s'$，$t=t'$

第12講　PART3 確認問題 解答

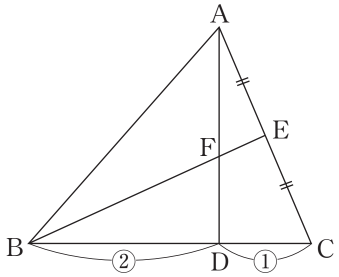
1 **[正解]** ア：1，イ：3，ウ：2，エ：3，オ：1，カ：2

[解説]

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1\times\overrightarrow{AB}+2\times\overrightarrow{AC}}{2+1}$$ [A]

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$



[A]　2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に内分する点を $P(\vec{p})$ とすると，$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

2 **[正解]** キ：1，ク：5，ケ：2，コ：5，サ：4，シ：1，
ス：3，セ：2

[解説]

$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AD}$（$k$ は実数）　……①とおくと，

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$ より

$$\overrightarrow{AF}=k\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{1}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}k\overrightarrow{AC}\quad\cdots\cdots②$$

$$=\frac{1}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}k\overrightarrow{AE}\quad\cdots\cdots③$$

点Fは線分BE上の点であるから，

$$\frac{1}{3}k+\frac{4}{3}k=1$$ [B]

$$k=\frac{3}{5}$$

よって，②より　$\boldsymbol{\overrightarrow{AF}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}}$

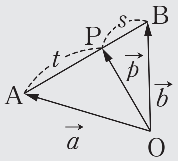
③より　$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AE}$ であるから

BF：FE＝4：1 [B]

①より　$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$ であるから

AF：FD＝3：2

[B]　点Pが直線AB上の点
$\iff \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$



$0<s<1$，$0<t<1$ のとき，
AP：PB＝$t：s$

第12講　PART4 確認問題 解答

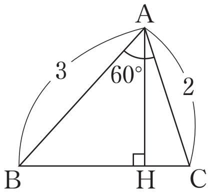
1

[正解] ア：3

[解説]

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60°$ [A]

$=3\times2\times\dfrac{1}{2}=3$



[A]　2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

2

[正解] イ：6，ウ：7，エ：1，オ：7，カ：6，
キ：7

[解説]

BH：HC＝s：$(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ [B]

[B]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，
$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

また，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ である。

よって

$\{(1-s)\vec{b}+s\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

$(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c}-(1-s)|\vec{b}|^2+s|\vec{c}|^2-s\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$3(1-s)-9(1-s)+4s-3s=0$

よって　$\boldsymbol{s=\dfrac{6}{7}}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{7}\vec{b}+\dfrac{6}{7}\vec{c}}$

第13講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-1，ウ：5，エ：2

[解説]

点 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$ を通り，$\vec{d}=(5,\ -2)$ に平行な直線の方程式は，

$$(x,\ y)=(-1,\ 3)+t(5,\ -2)\quad \text{[A]}$$
$$=(-1+5t,\ 3-2t)$$

すなわち，

$$\begin{cases} x=-1+5t \\ y=3-2t \end{cases}$$

[A]　点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$$

2 **[正解]** オ：5，カ：1，キ：6

[解説]

2 点 $\mathrm{A}(-3,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ -5)$ を通る直線の方程式は，

$$(x,\ y)=(1-t)(-3,\ 1)+t(2,\ -5)\quad \text{[B]}$$
$$=(-3+5t,\ 1-6t)$$

すなわち，

$$\begin{cases} x=-3+5t \\ y=1-6t \end{cases}$$

[B]　異なる 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式

$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

または

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b},\quad s+t=1$$

第13講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：5，ウ：2

[解説]

求める直線上の任意の点を $P(x,\ y)$ とすると，

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$ である。 [A]

$\overrightarrow{AP}=(x-3,\ y-2)$ より

$$4\times(x-3)-5\times(y-2)=0$$

よって，求める方程式は　$\mathbf{4x-5y-2=0}$

[A]　点 $A(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線のベクトル方程式は，
$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$
（$\vec{n}$ は，この直線の法線ベクトル）

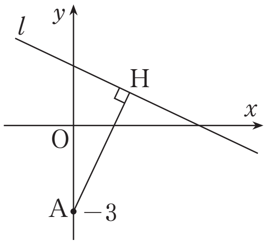
2

[正解] エ：2，オ：2，カ：2，キ：1，ク：2，ケ：5

[解説]

直線 $l：x+2y-4=0$ の法線ベクトルの 1 つは，

$\boldsymbol{\vec{n}=(1,\ 2)}$ [B]



[B]　直線 $ax+by+c=0$ は，$\vec{n}=(a,\ b)$ を法線ベクトルにもつ。

$\overrightarrow{AH}\parallel\vec{n}$ より

$$\overrightarrow{AH}=k\vec{n}\ (k \text{ は実数})$$

とおける。

$H(s,\ t)$ とおくと，$\overrightarrow{AH}=(s,\ t+3)$ より

$$(s,\ t+3)=k(1,\ 2)$$

よって　$s=k,\ t+3=2k$

すなわち　$s=k$，$t=2k-3$　……①

また，点 H は直線 l 上の点であるから，

$$s+2t-4=0\quad ……②$$

①を②に代入すると，

$$k+2(2k-3)-4=0$$

$$\boldsymbol{k=2}$$

①より　$s=2,\ t=1$

よって　点 H の座標は $\mathbf{(2,\ 1)}$

また，$\overrightarrow{AH}=(2,\ 4)$ より

$$AH=|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{2^2+4^2}=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$$

第13講　PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：①，イ：3

[解説]

$$|2\vec{p}-\vec{a}|=6$$

$$\left|\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|=3 \quad \text{[A]}$$

ここで，$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\vec{a}$ とすると，点Bは線分OAの中点である。

よって，求める円の中心は**線分OAの中点**であり，半径は**3**である。

> [A]　中心 $C(\vec{c})$，半径 r の円のベクトル方程式は，
> $|\vec{p}-\vec{c}|=r$

2 **[正解]** ウ：2，エ：3，オ：5，カ：2，キ：3，ク：2，ケ：2

[解説]

$|2\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}|=10$　より

$$|2(\vec{p}-\vec{a})+3(\vec{p}-\vec{b})|=10 \quad \text{[B]}$$

$$|5\vec{p}-(2\vec{a}+3\vec{b})|=10$$

$$\left|\vec{p}-\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}\right|=2$$

ここで，$\overrightarrow{OC}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$ とすると，点Cは線分ABを3：2に内分する点である。[C]

よって，求める図形は，

線分ABを**3：2**に内分する点を中心とする半径**2**の円である。

> [B]　方程式を $\vec{p}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表す。

> [C]　2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対し，線分ABを $m:n$ に内分する点を $P(\vec{p})$ とすると，$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

第13講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑥

[解説]

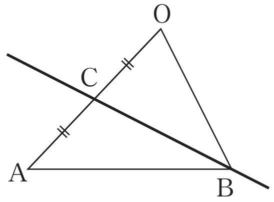
$$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$$

$$=2\alpha\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+\beta\overrightarrow{OB}$$ [A]

$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$ とすると，

$$\begin{cases}\overrightarrow{OP}=2\alpha\overrightarrow{OC}+\beta\overrightarrow{OB}\\ 2\alpha+\beta=1\end{cases}$$ [B]

これを満たす点Pの存在範囲は，**直線BC**である。



[A]　条件が $2\alpha+\beta=1$ だから，係数が 2α と β になるようにする。

[B]　$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$P(\vec{p})$ のとき，点Pが直線AB上にある
$\Longleftrightarrow$ $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$

2 [正解] イ：④

[解説]

$\alpha+\beta=k$ とおくと，$0 \leqq k \leqq \dfrac{2}{3}$

$k=0$ のとき，

$\alpha=\beta=0$ であり，点 P は点 O に一致する。

$0<k \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき，

$\alpha+\beta=k$ より，$\dfrac{\alpha}{k}+\dfrac{\beta}{k}=1$ [C]

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{\alpha}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{\beta}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

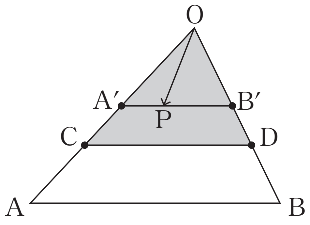
ここで，$\dfrac{\alpha}{k}=\alpha'$，$\dfrac{\beta}{k}=\beta'$ とおくと，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha'(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\beta'(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\ \alpha'+\beta'=1,\ \alpha'\geqq 0,\ \beta'\geqq 0\end{cases}$$ [D]

より，$k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$k\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ である点 A′，B′ をとると，点 P の存在範囲は，辺 AB に平行な線分 A′B′ である。

ここで，$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とし，k を $0<k \leqq \dfrac{2}{3}$ の範囲で変化させると，線分 A′B′ は，点 O を除く △OCD の周および内部を平行に動く。

以上より，点 P の存在範囲は，**△OCD の周および内部**である。



[C]　右辺を 1 にするため，両辺を k で割る。

[D]　$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{P}(\vec{p})$ のとき，
点 P が線分 AB 上にある
$\Longleftrightarrow \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$
$s+t=1$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$
点 P が △OAB の周および内部にある
$\Longleftrightarrow \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$
$s+t \leqq 1$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$

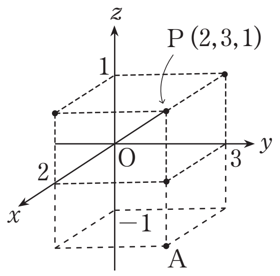
第14講 PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：3，ウエ：−1

[解説]

点Aは次の図の位置にある。



よって，点Aの座標は，**(2，3，−1)** [A]

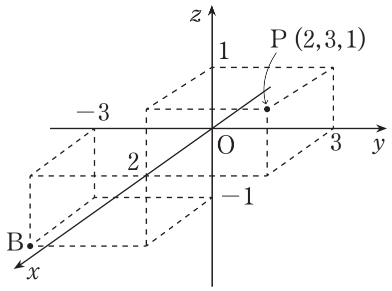
[A]　P$(a,\ b,\ c)$ と座標平面に関して対称な点の座標
xy 平面：$(a,\ b,\ -c)$
yz 平面：$(-a,\ b,\ c)$
zx 平面：$(a,\ -b,\ c)$

2

[正解] オ：2，カキ：−3，クケ：−1

[解説]

点Bは次の図の位置にある。



よって，点Bの座標は，**(2，−3，−1)** [B]

[B]　P$(a,\ b,\ c)$ と座標軸に関して対称な点の座標
x 軸：$(a,\ -b,\ -c)$
y 軸：$(-a,\ b,\ -c)$
z 軸：$(-a,\ -b,\ c)$

3 [正解] コサ：-2，シス：-1，セ：3

[解説]

点 P と点 (0，1，2) に関して対称な点が C であるから，線分 PC の中点が点 (0，1，2) となる。

点 C の座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\frac{2+x}{2}=0,\quad \frac{3+y}{2}=1,\quad \frac{1+z}{2}=2$$ [C]

$$x=-2,\quad y=-1,\quad z=3$$

よって，点 C の座標は，**(−2，−1，3)**

[C]　2 点$(a_1,\ b_1,\ c_1)$，$(a_2,\ b_2,\ c_2)$ を結ぶ線分の中点の座標は，

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2},\ \frac{b_1+b_2}{2},\ \frac{c_1+c_2}{2}\right)$$

4 [正解] ソタ：21

[解説]

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(0-1)^2+(-1-3)^2+(4-2)^2}$$ [D]

$$=\sqrt{1+16+4}=\sqrt{\mathbf{21}}$$

[D]

2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 間の距離は，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

第14講　PART2 確認問題 解答

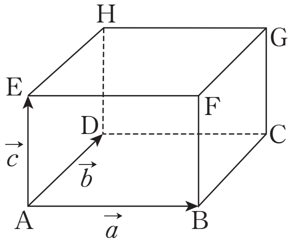
1

[正解] ア：③

[解説]

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}$ [A][B]

$\quad=\vec{b}+\vec{c}$



[A]　2つのベクトルの和や差を用いて
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
のようにベクトルを分割して表すことができる。

[B]　$\overrightarrow{AH}$ をベクトルの和の形で表す。

2

[正解] イ：②

[解説]

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}$ [C]

$\quad=-\vec{a}+\vec{c}$

[C]　$\overrightarrow{BE}$ をベクトルの和の形で表す。

(別解)

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}$

$\quad=\vec{c}-\vec{a}$

$\quad=-\vec{a}+\vec{c}$

3

[正解] ウ：⑥

[解説]

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$

$\quad=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

(別解)

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}$ [D]

$\quad=\overrightarrow{AE}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

$\quad=\vec{c}-(\vec{a}+\vec{b})$

$\quad=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

[D]　$\overrightarrow{CE}$ を始点をAとするベクトルで表す。

4 **[正解]** エ：⑤

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{HG}}+\overrightarrow{\mathrm{GF}}+\overrightarrow{\mathrm{FB}}$$

$$=\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}-\vec{\boldsymbol{c}}$$

（別解）

$$\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AH}}$$ [E]

$$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})$$

$$=\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})$$

$$=\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}-\vec{\boldsymbol{c}}$$

[E]　始点を A とするベクトルで表す。

第14講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：14

[解説]

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}$ [A]

$=\sqrt{14}$

[A]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ のとき，
$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$

2

[正解] ウエ：-2，オ：2，カキ：-7，クケ：57

[解説]

$\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$ [B]

$=(1,\ 0,\ -1)-2(0,\ 2,\ 3)+3(-1,\ 2,\ 0)$

$=(1,\ 0,\ -1)+(0,\ -4,\ -6)+(-3,\ 6,\ 0)$

$=\mathbf{(-2,\ 2,\ -7)}$ [C]

よって，$\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$ の大きさは，

$|\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-7)^2}$

$=\sqrt{\mathbf{57}}$

[B]　平面ベクトルと同じように計算する。

[C]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，
$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき
$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)+(b_1,\ b_2,\ b_3)$
$=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$
$\vec{a}-\vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)-(b_1,\ b_2,\ b_3)$
$=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$
$ka_1=k(a_1,\ a_2,\ a_3)$
$=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$　（k は実数）

3 **[正解]** コ：3，サ：2，シ：2

[解説]

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ （s，t は実数）とおくと [D]

$$(1,\ 8,\ 3)$$
$$=s(1,\ 0,\ -1)+t(0,\ 2,\ 3)+u(-1,\ 2,\ 0)$$ [E]

つまり

$$(1,\ 8,\ 3)=(s-u,\ 2t+2u,\ -s+3t)$$

よって

$s-u=1$ ……①

$2t+2u=8$ ……②

$-s+3t=3$ ……③

①，②より，$s+t=5$ ……④

③，④より，$s=3$，$t=2$

このとき，①より　$u=2$

よって　$\boldsymbol{\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}}$

[D]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が同一平面上にないとき，空間内の任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s，t，u を用いて
$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$
の形で，ただ１通りに表すことができる。

[E]　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおいて，両辺を成分で表す。

第 14 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：45

[解説]

$\overrightarrow{AB}=(0-1,\ 0-2,\ 2-0)$ [A]

$=(-1,\ -2,\ 2)$

$\overrightarrow{AC}=(2-1,\ 1-2,\ 4-0)$

$=(1,\ -1,\ 4)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\times1+(-2)\times(-1)+2\times4$ [B]

$=9$

よって，

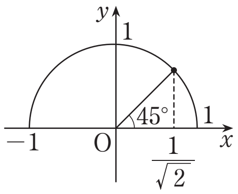
$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$ [C]

$=\dfrac{9}{3\times3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ の範囲で

これを満たす θ は，

$\theta=45^\circ$



[A]　2 点 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$B(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，

$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$

$|\overrightarrow{AB}|$

$=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

[B]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

[C]　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のなす角を θ とすると，

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

2

[正解] ウ：9，エ：2

[解説]

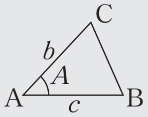
$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin45^\circ$ [D]

$=\dfrac{1}{2}\times3\times3\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{9}{2}$

[D]　$\triangle ABC$ の面積を S とすると，

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$



第15講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2，ウ：1，エ：3，オ：2，カ：3

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{1\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\times\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2+1}$$ [A]

$$=\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{AN}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$ [B]

$$=\left(\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)-\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}$$

[A]　2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は，

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

[B]　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ を用いて表す。

2

[正解] キ：1，ク：6，ケ：1，コ：3，サ：1，シ：3

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$$ [C]

$$\overrightarrow{\mathrm{GM}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$

$$=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$$

$$=\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{d}$$

[C]　3点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ に対し，△ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は，

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

第15講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：2

[解説]

$\angle \mathrm{CAD}=60^\circ$ であるから

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=|\vec{c}||\vec{d}|\cos 60^\circ \quad \text{[A]}$$

$$=2\times 2\times\frac{1}{2}=\mathbf{2}$$

[A]　$\vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角は，60°

2

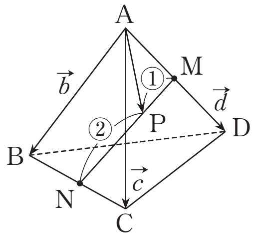
[正解] イ：1，ウ：6，エ：1，オ：6，カ：1，
キ：3，クケ：11，コ：3

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\vec{d} \quad \text{[B]}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{b}=2$$



[B]　まず，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表す。

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\vec{d}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\vec{\boldsymbol{b}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\vec{\boldsymbol{c}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{\boldsymbol{d}}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=\left|\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}\right|^2$$

$$=\frac{1}{36}|\vec{b}|^2+\frac{1}{36}|\vec{c}|^2+\frac{1}{9}|\vec{d}|^2+\frac{1}{18}\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$+\frac{1}{9}\vec{c}\cdot\vec{d}+\frac{1}{9}\vec{d}\cdot\vec{b} \quad \text{[C]}$$

$$=\frac{1}{36}\times 2^2+\frac{1}{36}\times 2^2+\frac{1}{9}\times 2^2+\frac{1}{18}\times 2$$

$$+\frac{1}{9}\times 2+\frac{1}{9}\times 2=\frac{11}{9}$$

[C]　$|s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}|^2$
$=s^2|\vec{a}|^2+t^2|\vec{b}|^2+u^2|\vec{c}|^2$
$+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+2tu\vec{b}\cdot\vec{c}+2us\vec{c}\cdot\vec{a}$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\dfrac{\sqrt{\mathbf{11}}}{\mathbf{3}}$

3 **[正解]** サ：0

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{b})$$

$$=-\left(\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}\right)(\vec{b}-\vec{c})$$

$$=-\left(\frac{1}{6}|b|^2-\frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{6}\vec{c}\cdot\vec{b}-\frac{1}{6}|\vec{c}|^2\right.$$ [D]

$$\left.+\frac{1}{3}\vec{d}\cdot\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{d}\cdot\vec{c}\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{6}\times2^2-\frac{1}{6}\times2+\frac{1}{6}\times2-\frac{1}{6}\times2^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\times2-\frac{1}{3}\times2\right)$$

$$=\mathbf{0}$$

[D]
$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$
$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

第15講 PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：7，イ：1

[解説]

3点A，B，Cが一直線上にあるとき，

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k が存在する。 [A]

$$\overrightarrow{AC}=(x-1,\ y-3,\ 2)$$

$$\overrightarrow{AB}=(3,\ -1,\ 1)$$

よって，$(x-1,\ y-3,\ 2)=k(3,\ -1,\ 1)$

$$\begin{cases} x-1=3k \\ y-3=-k \\ 2=k \quad \cdots\cdots① \end{cases}$$

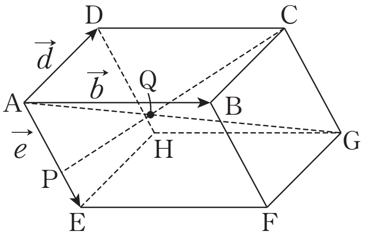
①より　$k=2$

したがって　$\boldsymbol{x=7,\ y=1}$

[A]　3点A，B，Cが一直線上にある
$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ を満たす
実数 k が存在する

2 [正解] ウ：④，エ：①，オ：2，カ：5

[解説]



$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\vec{e}$$

点Qは線分PCを2：3に内分する点であるから，

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{3\times\overrightarrow{AP}+2\times\overrightarrow{AC}}{2+3}$$ [B]

$$=\frac{3}{5}\overrightarrow{AP}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\vec{e}+\frac{2}{5}(\vec{b}+\vec{d})$$

$$=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{d}+\frac{2}{5}\vec{e}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{5}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})}\quad\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{AG}=\boldsymbol{\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}}\quad\cdots\cdots②$$

①，②より　$\boldsymbol{\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AG}}$ [C]

よって，3点A，Q，Gは一直線上にある。

> [B]　2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対し，線分ABを $m:n$ に内分する点Pの位置ベクトルは，
> $$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

> [C]　3点A，B，Cが一直線上にある
> $\iff$ $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 k が存在する

第15講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：5

[解説]

$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 4,\ 1)$，$\overrightarrow{AC}=(3,\ -1,\ 2)$ [A]

これより，3点A，B，Cは一直線上にない

(解法1)

$\overrightarrow{AD}=(-1,\ 7,\ z-1)$

点Dが平面ABC上にあるとき，

$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s，t が存在する。 [B]

このとき

$(-1,\ 7,\ z-1)=s(-2,\ 4,\ 1)+t(3,\ -1,\ 2)$

つまり　$-1=-2s+3t$　……①

$7=4s-t$　……②

$z-1=s+2t$　……③

①，②より　$s=2$，$t=1$

したがって，③より　$\boldsymbol{z=5}$

(解法2)

原点をOとすると，点Dが平面ABC上にあるとき

$\overrightarrow{OD}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$

を満たす実数 s，t，u が存在する。よって

$(1,\ 7,\ z)=s(2,\ 0,\ 1)+t(0,\ 4,\ 2)$

$+u(5,\ -1,\ 3)$ [C]

つまり　$1=2s+5u$　……①

$7=4t-u$　……②

$z=s+2t+3u$　……③

また　$s+t+u=1$　……④

①，②，④より　$s=-2$，$t=2$，$u=1$

したがって，③より　$\boldsymbol{z=5}$

[A]　2点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，
$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$

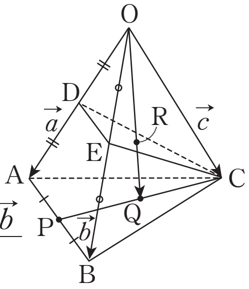
[B]　一直線上にない3点A，B，Cの定める平面 α について，
点Dが平面 α 上にある
$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$
となる実数 s，t が存在する

[C]　一直線上にない3点A，B，Cの定める平面 α について，
点Pが平面 α 上にある
$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$
$s+t+u=1$
を満たす実数 s，t，u が存在する

第 16 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：4，ウ：1，エ：2，オ：1，カ：6，
キ：1，ク：6，ケ：1，コ：3

[解説]



$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\vec{a},\ \overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\vec{b}$$

点Ｐは辺 AB の中点であるから

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

点Ｑは線分 CP の中点であるから

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OC}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$$

点Ｒは直線 OQ 上の点であるから，$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OQ}$ (k は実数)と表される。

よって　$\overrightarrow{OR}=k\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$ [A]

$$=\frac{1}{4}k\vec{a}+\frac{1}{4}k\vec{b}+\frac{1}{2}k\vec{c}\quad\cdots\cdots①$$

[A]　3 点 O，R，Q が一直線上にある条件を利用する。

また，点Ｒは平面 CDE 上の点であるから，実数 s，t，u を用いて

$\overrightarrow{OR}=s\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OE}+u\overrightarrow{OC}$ [B]

$s+t+u=1$

[B]　同一直線上にない 3 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ と点 $P(\vec{p})$ において，
点Ｐが平面 ABC 上にある
$\Longleftrightarrow$ $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$，
$s+t+u=1$

と表される。ここで，$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}s\vec{a}+\frac{1}{2}t\vec{b}+u\vec{c}\quad\cdots\cdots②$$

4 点 O，A，B，C は同一平面上にないから，①，②より

$$\frac{1}{4}k=\frac{1}{2}s,\ \ \frac{1}{4}k=\frac{1}{2}t,\ \ \frac{1}{2}k=u$$

すなわち　$s=\frac{1}{2}k,\ \ t=\frac{1}{2}k,\ \ u=\frac{1}{2}k$

これらと　$s+t+u=1$ より

$$\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}k=1 \qquad k=\frac{2}{3}$$

したがって，①より　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\boldsymbol{\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}}$

第16講　PART2 確認問題 解答

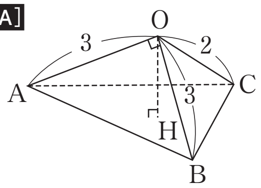
1 **[正解]** ア：1，イ：5，ウ：1，エ：5，オ：3，カ：5

[解説]

$\vec{a}\perp\vec{b}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos 60°$ [A]

$=3\times 2\times\dfrac{1}{2}=3$



同様に　$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$　（s，t，u は実数）とおくと，

点 H は平面 ABC 上の点だから，

$s+t+u=1$　……①　[B]

OH ⊥ 平面 ABC より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　[C]

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$-9s+9t+3u-3u=0$

$-s+t=0$　……②

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから

$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{c}-s|\vec{a}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u|\vec{c}|^2-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$3s-9s+3t+4u-3u=0$

$-6s+3t+u=0$　……③

①，②，③ より　[D]

$s=\dfrac{1}{5}$，$t=\dfrac{1}{5}$，$u=\dfrac{3}{5}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

[A]　2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

[B]　同一直線上にない 3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) と点 P($\vec{p}$) において，
点 P が平面 ABC 上にある
$\Longleftrightarrow$ $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$，
$s+t+u=1$

[C]　OH ⊥ (平面 ABC)
$\Longleftrightarrow$ OH ⊥ AB かつ OH ⊥ AC

[D]　①，②，③の連立方程式を解く。

第16講　PART3 確認問題 解答

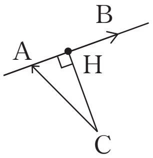
1　**[正解]** ア：3，イ：6，ウ：0，エ：6

[解説]

点 H は直線 AB 上にあるので，

$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{AB}$（$t$ は実数）［A］

と表せる。



$\overrightarrow{AB}=(1,\ 3,\ -1)$

$\overrightarrow{CA}=(-3,\ -5,\ 4)$

より

$\overrightarrow{CH}=(-3,\ -5,\ 4)+t(1,\ 3,\ -1)$

$=(-3+t,\ -5+3t,\ 4-t)$

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ より　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ［B］

$(-3+t)+3(-5+3t)-(4-t)=0$

$11t-22=0$

$t=2$

よって　$\overrightarrow{CH}=(-1,\ 1,\ 2)$

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}$

$=(4,\ 5,\ -2)+(-1,\ 1,\ 2)$

$=(3,\ 6,\ 0)$

よって，点 H の座標は　**(3，6，0)**

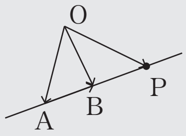
また　$\mathrm{CH}=|\overrightarrow{CH}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

［A］　点 P が直線 AB 上の点

$\iff \overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$

$\iff \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$（$t$ は実数）

$\overrightarrow{AB}$ を直線 AB の方向ベクトルという。



［B］　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ において，

$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

第16講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：1，イ：2，ウ：3，エオ：26

[解説]

球面 S の中心は，線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{1-5}{2},\ \frac{-1+7}{2}\right)$$

すなわち　$(1,\ -2,\ 3)$

半径は

$$\sqrt{(0-1)^2+(1+2)^2+(-1-3)^2}$$
$$=\sqrt{1+9+16}$$
$$=\sqrt{26}$$

よって，球面 S の方程式は

$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=26}$$ [A]

[A]　中心が 点 $(a,\ b,\ c)$，半径が r の球面の方程式は，
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

2　**[正解]** カ：1，キク：−2，ケ：0，コサ：17

[解説]

球面 S が xy 平面，すなわち $z=0$ と交わってできる円の方程式は

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(-3)^2=26$$
$$z=0$$ [B][C]

すなわち　$(x-1)^2+(y+2)^2=17$，$z=0$

よって，中心 $\boldsymbol{(1,\ -2,\ 0)}$，半径 $\boldsymbol{\sqrt{17}}$ の円を表す。

[B]　点 $(a,\ b,\ c)$ を通り，xy 平面に平行な平面の方程式は
$z=c$

[C]　xy 平面の方程式は，$z=0$。

3 [正解] シス：-2，セ：8

[解説]

球面 S が平面 $z=k$ と交わってできる円の方程式は

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(k-3)^2=26,$$

$$z=k$$ [D]

> [D]　$z=k$ は，xy 平面に平行な平面の方程式

すなわち

$$(x-1)^2+(y+2)^2=26-(k-3)^2,\quad z=k$$

これは，中心 $(1,\ -2,\ k)$，半径 $\sqrt{26-(k-3)^2}$ の円を表す。

半径の条件より，

$$26-(k-3)^2=1^2$$

$$(k-3)^2=25$$

$$k-3=\pm 5$$

よって，$\boldsymbol{k=-2,\ 8}$

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。